Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 4

Abgabetermin Mittwoch, den 21.5.2003 vor der Vorlesung.

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$
   (a) Zeigen Sie mit dem Satz von Gerschgorin, daß A invertierbar ist.
   (b) Zeigen Sie, daß
$$\|A\|_2 \leq 7$$

2. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine 2-mal stetig differenzierbare reguläre Kurve.
   (a) Zeigen Sie, daß für die Krümmung κ gilt
$$\kappa(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|^2} \left\| f''(t) - \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|^2} \sum_{j=1}^{n} f_j'(t) f_j''(t) \right\|$$
   (b) Berechnen Sie die Krümmung von:
$$\begin{aligned} f_1(t) &= (\cos(t), \sin(t), t) \\ f_2(t) &= (\cos 3t \cdot (3+\cos 2t), \sin 2t, \sin 3t \cdot (3+\cos 2t)) \\ f_3(t) &= \left(t, t^2, t^3\right) \end{aligned}$$

3. Schreiben Sie ein Mapleskript, das einen Plot einer Raumkurve erstellt, und an einem gegebenen Parameterwert das begleitende Dreibein (T, N, B) aus Tangentialvektor T, Normalenvektor N und Binormalenvektor B einzeichnet.

   Hinweis: Verwenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren.

4. Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und
$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ &f(t) = \left(e^{at}\cos(t), e^{at}\sin(t)\right) \end{aligned}$$
   (a) Bestimmen Sie die Bogenlänge von $f(]-\infty, t])$ für $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Gerade durch 0 und $f(t)$ und dem Tangentialvektor von f in $f(t)$.

5. Zeigen Sie, daß für Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ folgende Identitäten gelten:
   (a) $a \times (b \times c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$
   (b) $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle b, c\rangle\langle a, d\rangle$