Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 5

Abgabetermin Mittwoch, den 28.5.2003 vor der Vorlesung.

1. Zeigen Sie:

   (a) $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ eine Familie von offenen Mengen $\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i$ offen.

   (b) $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Longrightarrow U_1 \cap U_2$ offen.

   (c) $\mathbb{R}^n$ und $\varnothing$ sind offen.

2. Zeigen Sie:

   $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset A$ gilt $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu \in A$.

3. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3-ter Ordnung von $f : \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$

   $$f(x, y) = x^y$$

   im Punkt $(1, 1)$.

4. Seien $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, ..., n$ Punkte in der Ebene. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ der Gerade $y = ax + b$, sodaß

   $$\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$$

   minimal wird (d.h. die Ausgleichsgerade).

5. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $$f(x, y) = -\left(x^2 + y^2\right)^2 - 3xy^2 + x^3 + 5\left(x^2 + y^2\right) - \frac{875}{256}$$

   und fertigen Sie einen Plot der Höhenlinien an. Beachten Sie f ist invariant unter

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$