

Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 7

Abgabetermin Mittwoch, den 11.6.2003 vor der Vorlesung.

1. Zeigen Sie die Volumina von Zylinder, Halbkugel und Kegel mit gleichem Grundkreis und gleicher Höhe haben das Verhältnis $3 : 2 : 1$.
2. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Der Schwerpunkt $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ von K ist definiert durch

$$\bar{x}_i := \frac{1}{\text{Vol}(K)} \int_K x_i dx$$

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des soliden Ellipsoids

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)^2 + 2(y - z - 1)^2 + 3(z + 1)^2 \leq 4\}$$

3. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt. Das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse ist

$$m = \int_K (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Bestimmen Sie Volumen und Trägheitsmoment des Torus

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 4R^2(x^2 + y^2)\}$$

mit Radien $R > r > 0$.

4. Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, $F(K)$ ist kompakt.
5. Bestimmen Sie das Volumen des Durchschnittes $Z_1 \cap Z_2$ von

$$Z_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$Z_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1\}$$