Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 8

Abgabetermin Mittwoch, den 18.6.2003 vor der Vorlesung.

1. Berechnen Sie auf
$$K := \left\{(x,y,z,w) \subset \mathbb{R}^4 \mid 0 \le w \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 1\right\}$$
das Integral
$$\int_K zw^2 dxdydzdw$$

2. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, und sei der Schwerpunkt von K im Nullpunkt. Der Trägheitstensor I von K ist definiert als die Matrix
$$I = \left(\int_K \left(\|x\|^2 \delta_{i,j} - x_i x_j\right) dx_1 dx_2 dx_3\right)_{i,j=1,2,3}$$
Sei $\omega \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\omega\| = 1$. Das Trägheitsmoment von K bezüglich der Drehachse $L = \mathbb{R}\omega$ ist definiert als
$$I_L := \int_K r(x)^2 dx_1 dx_2 dx_3$$
wobei $r(x)$ den Abstand von x zu der Drehachse bezeichne. Zeigen Sie, daß
$$I_L = {}^t\omega I \omega$$

3. Bestimmen Sie den Trägheitstensor des Kegels
$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le \frac{R^2}{h^2} x_3^2,\ 0 \le x_3 \le h\right\}$$

4. Der Satz von Steiner besagt:

   Ist $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und I der Trägheitstensor von K, und ist eine Drehachse gegeben durch eine affine Gerade $L = Q + \mathbb{R}\omega \subset \mathbb{R}^3$, $\|\omega\| = 1$. Dann gilt für das Trägheitsmoment I_L von K um die Drehachse L
$$I_L = r^2 Vol(K) +^t \omega I \omega$$
   wobei r der Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse ist.

   Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Steiner das Trägheitsmoment des Kegels aus Aufgabe 3 bei Rotation um eine Gerade auf dem Kegelmantel.

5. Sei f_i die Anzahl der Möglichkeiten, wie i als Summe von verschiedenen positiven ganzen Zahlen dargestellt werden kann, und g_i die Anzahl, wie i als Summe von ungeraden positiven ganzen Zahlen dargestellt werden kann. Beispiel:

$f_5 = 3$	$g_5 = 3$
5	5
$4+1$	$3+1+1$
$3+2$	$1+1+1+1+1$

   Euler entdeckte, daß $f_i = g_i\ \forall i$ gilt. Zeigen Sie:

   (a) Die Erzeugendenfunktion von $(f_i)_i$ ist $F(x) = (1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)...$

   (b) Die Erzeugendenfunktion von $(g_i)_i$ ist $G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)...}$

   (c) Verwenden Sie die Identität $\left(1+x^i\right)\left(1-x^i\right) = \left(1-x^{2i}\right)$, um $F = G$ zu zeigen.