

§ 29 Fourier-Reihen

1. Definition (periodisch)

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode L , wenn

$$f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel:

Die Funktionen $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind periodisch mit Periode 2π .

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine L -periodische Funktion, dann

ist $\tilde{f}$ mit
$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right)$$

2π -periodisch.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x+2\pi) &= f\left(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) \\ &= f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f}(x)\end{aligned}$$

Umgekehrt erhalten wir f aus $\tilde{f}$ zurück durch

$$f(x) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Wir betrachten daher 2π -periodische Funktionen.

Beispiele:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n [b_k \cdot \sin(kx) + a_k \cos(kx)]$$

(trigonometrisches Polynom) ist 2π -periodisch.

Mit Additionstheorem folgt, daß $\sin(kx) = P_k(\cos x, \sin x)$
 $\cos(kx) = Q_k(\cos x, \sin x)$

für P, Q Polynome in 2 Variablen.

② Definition (Fourier-Reihe)

Eine Fourier-Reihe ist eine Reihe

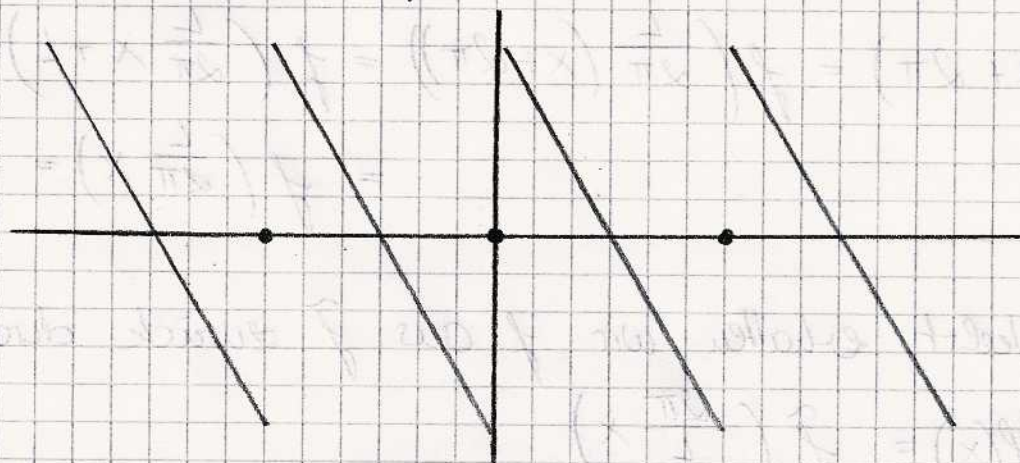
$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$a_0, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$ heißen Fourier-Koeffizienten der Reihe.

Beispiel: Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$

③ Satz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ konvergiert punktweise gegen die 2π -periodische Zackenfunktion.



$$\text{mit } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{für } x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dabei ist die Konvergenz für $0 < \delta < 1$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig.

Beweis:

Wir verwenden die Eulerschen Formeln

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Hilfssatz:

Sei $t \in \mathbb{R}$ kein ganzzahliges Vielfaches von 2π .

Dann gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

Beweis:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{2} e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-int} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Punktweise Konvergenz:

Für $x = 0$ klar.

Für $x \in]0, 2\pi[$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^x \cos(kt) dt \stackrel{\#S}{=} \int_{\pi}^x \left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2} \right) dt$$

$$= \frac{\pi - x}{2} + \underbrace{\int_{\pi}^x \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

folgt aus
nachfolgendem Satz:

4. Satz:

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.
Dann gilt für

$$F(k) = \int_a^b f(x) \sin(kx) dx$$

d.h.

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} F(k) = 0$$

Satz 4 gibt die punktweise Konvergenz.

Beweis von Satz 4:

Für $k \neq 0$ gilt:

$$F(k) = -f(x) \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b f'(x) \cos(kx) dx$$

Da f und f' stetig sind, $\exists M$, so daß $|f(x)| \leq M$,

$$|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

$$\Rightarrow |F(k)| \leq \frac{2M}{k} + \frac{1}{k} M [b-a] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Gleichmäßige Konvergenz auf $[\delta, 2\pi - \delta]$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right)$$

$$\Rightarrow |S_n(x)| \leq \left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right| = \left| \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}|}$$

$$\leq \left| \frac{2}{\sin(\pi/2)} \right| \leq \frac{2}{\sin \delta/2}$$

unabhängig von x .

$\Rightarrow$

$m > n > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^m \frac{\sin(kx)}{k} \right| &= \left| \sum_{k=n}^m \frac{S_k(x) - S_{k-1}(x)}{k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=n}^m S_k(x) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m(x)}{m+1} - \frac{S_{n-1}(x)}{n} \right| \\ &\leq \frac{2}{\sin \delta/2} \left(\sum_{k=n}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{2}{\sin \delta/2} \cdot \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{2}{\sin \delta/2} \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^n \sin \frac{kx}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ bildet gleichmäßige
Cauchy-Folge auf $[\delta, 2\pi - \delta]$.

$\Rightarrow$ gleichmäßig konvergent. ■

$$0 < n < m$$

$$\left| \frac{(x)_{m-n}}{x} - \frac{(x)_m}{x} \right| = \left| \frac{(x)_{m-n}}{x} \right|$$

$$\left| \frac{(x)_{m-n}}{x} - \frac{(x)_m}{x} \right| = \left| \frac{(x)_{m-n}}{x} - \frac{(x)_{m-n}}{x} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) (x)_{m-n} \right|$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) \left| \frac{(x)_{m-n}}{x} \right|$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) \frac{(x)_{m-n}}{x} = \frac{1}{x^2} (x)_{m-n}$$

$$[b - \pi, b] \text{ for } \pi - \mu(b)$$

$$\Rightarrow \text{differential equation}$$

Erinnerung (punktweise, gleichmäßig konvergent)

(f_n) Funktionenfolge, f Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$.

$$f_n \rightarrow f$$

(f_n) konvergiert punktweise gegen f ,
wenn $\forall x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ gegen $f(x)$
konvergiert, d.h. $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon)$,
so daß $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

(f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f ,
wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$,
so daß $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D$.

Im Satz haben wir punktweise Konvergenz, aber
nicht gleichmäßige wegen dem Zwischenwertsatz.

Genauer:

$$(f_n) \xrightarrow{\text{gl.}} f, \quad f_n \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ stetig}$$

Erinnerung

Satz

Sei (f_n) Folge von stetig differenzierbaren Funktionen,
 $(f_n) \rightarrow f$. f ist differenzierbar mit $f' = \lim f'_n$,
wenn (f'_n) gleichmäßig konvergiert.

Korollar

Die Fourier-Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$ für $x \in [0, 2\pi]$.

Insbesondere gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis:

Die Konvergenz ist gleichmäßig, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergente Majorante ist, die nicht von x abhängt.

Sei $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ die Grenzfunktion.

Wir zeigen:

F ist auf $]0, 2\pi[$ differenzierbar mit $F'(x) = -\frac{\pi-x}{2}$.

In der Tat:

die Reihe der Ableitungen ist $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$, welche gleichmäßig auf $[\delta, 2\pi-\delta]$ gegen $-\frac{\pi-x}{2}$ konvergiert.

Also $F(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Also

$$\int_0^{2\pi} F(x) dx = \frac{2}{3} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^3 \Big|_0^{2\pi} + 2\pi c$$

$$= \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 \right] + 2\pi c$$

$$= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c$$

Andererseits gilt wegen gleichmäßiger Konvergenz:

$$\int_0^{2\pi} F(x) dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx \stackrel{\text{glm.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = 0$$

$$\Rightarrow c = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \text{auf } [0, 2\pi]$$

$x=0$ einsetzen gibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ haben wir also für $s=2$ bestimmt.

Wir werden sehen:

Fourier-Analyse gibt die Werte $\zeta(2n)$ an geraden natürlichen Zahlen.

(5.) Definition (Fourier-Koeffizienten)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion, die über $[0, 2\pi]$ integrierbar ist. Dann heißen die Zahlen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{für } k=0, 1, 2, \dots \quad \text{und}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{für } k=1, 2, \dots$$

die Fourier-Koeffizienten von f .

Die Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$

heißt Fourier-Reihe von f .

Beispiel:

Ist $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ ein trigonometrisches Polynom, dann hat f die Fourier-Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$

Dies folgt leicht mit folgenden Formeln:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \cos(lx) dx = 0 \quad \text{für } k, l \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(lx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \sin(lx) dx = 0 \quad \text{für } k \neq l$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(kx) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx = \pi$$

⑥

Häufig wollen wir auch die Funktion e^{ikx} verwenden wegen Eulerscher Formeln

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

Bezüglich dieser Funktion gilt für die n -te Partialsumme

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $c_0 = \frac{a_0}{2}$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

} für $k \geq 1$

Lassen wir allgemeine komplexe Zahlen c_k zu, so erhalten wir Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die 2π -periodisch sind. Für die Formeln der Fourier-Koeffizienten müssen wir dann erklären, was

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{für eine komplexwertige Funktion}$$

$$f = u + iv, \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{bedeutet.}$$

Wir setzen

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

mit u, v Real- und Imaginärteil von f .

Also:

Eine komplexwertige Funktion f ist integrierbar genau dann, wenn Real- und Imaginärteil integrierbar sind. Mit dieser Notation haben wir dann die Formel

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Die Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

heißt konvergent, wenn die Folge $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx}$ konvergiert.

(7.)

Wie hängt dies mit der Linearen Algebra zusammen?

Sei V der $\mathbb{C}$ -VR der 2π -periodischen, über $[0, 2\pi]$ integrierbaren Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Auf diesem Raum definieren wir ein "Skalarprodukt"

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

und eine zugehörige "Norm"

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

(Allgemeiner kann man p -Norm auf Funktionenräumen durch $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ erklären.)

Es gilt $\|f\|_2 \geq 0$, aber $\|f\|_2 = 0$ ohne $f = 0 \in V$ möglich.

Zum Beispiel wenn f nur an endlich vielen Stellen in $[0, 2\pi]$ Werte $\neq 0$ hat.

Aber auf dem Unterraum $U \subset V$ der stetigen Funktionen ist das Skalarprodukt $\langle, \rangle$ positiv definit.

Für die Norm gilt

die Δ -Ungleichung $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$,

die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$

und

P. Satz (Pythagoras)

Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodische, über $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

genau dann, wenn $\langle f, g \rangle = 0$, d.h. $f \perp g$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle f+g, f+g \rangle &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle + \underbrace{\langle g, f \rangle + \langle g, f \rangle}_{2\langle g, f \rangle} \end{aligned}$$

Pythagoras $\Leftrightarrow \langle g, f \rangle = 0$

9.

Die Funktionen $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $e_k(x) = e^{ikx}$ bilden ein Orthonomalsystem.

$$\begin{aligned}\langle e_k, e_l \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \cdot e^{ilx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x} dx \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } l=k \\ \frac{e^{i(l-k)x}}{i(l-k)} \Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{für } l \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{kl}\end{aligned}$$

Die n -te Partialsumme $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikl}$ mit $c_k = \langle e_k, f \rangle$ läßt sich also als orthogonale Projektion von f auf den von $e_{-n}, \dots, e_n$ erzeugten Unterraum auffassen.

10. Hilfssatz

Sei $f \in V$, c_k die Fourier-Koeffizienten von f .

Dann:

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Beweis:

$$g = f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k, \quad g \perp \sum_{k=-n}^n c_k e_k$$

Also

$$\|f\|_2^2 = \|g\|_2^2 + \left\| \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2^2 = \|g\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

11. Korollar (Besselsche Ungleichung)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodische, über $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktion mit Fourier-Koeffizienten c_k . Dann gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Beweis:

Nach dem Hilfssatz:

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \geq 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Behauptung}$$

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

$\Rightarrow$ Gilt in der Besselschen Ungleichung Gleichheit, dann konvergiert die Fourierreihe in f im Mittel gegen f .

(12.) Definition (quadratisches Mittel)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen aus V .
Dann heißt die Folge (f_n) im quadratischen Mittel konvergent gegen f , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

$$\|f - f_n\|_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f - f_n|^2 dx \right)^{1/2}}_{\text{quadratisches Mittel}}$$

(13.) Satz

Sei f eine 2π -periodische, über $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktion. Dann gilt:

Die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Gleichheit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2$

(14.) Bemerkung

Man nennt diese Gleichheit auch Vollständigkeitsrelation. Sie besagt, daß der $\|\cdot\|_2$ -Abschluß des von den

e_k erzeugten Unterraum ganz V ist.

15. Korollar (was wir im Beweis verwenden und schon gezeigt haben)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2} \quad \text{auf }]0, 2\pi[$$

$$c_k = \begin{cases} -\frac{i}{2k} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \quad \text{Sind die Fourier-Koeffizienten von } f.$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{-i}{2k} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(\pi-x)^3}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

16. Korollar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Beweis:

$$\text{Wir wissen } \frac{(x-\pi)^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} (e^{ikx} + e^{-ikx})$$

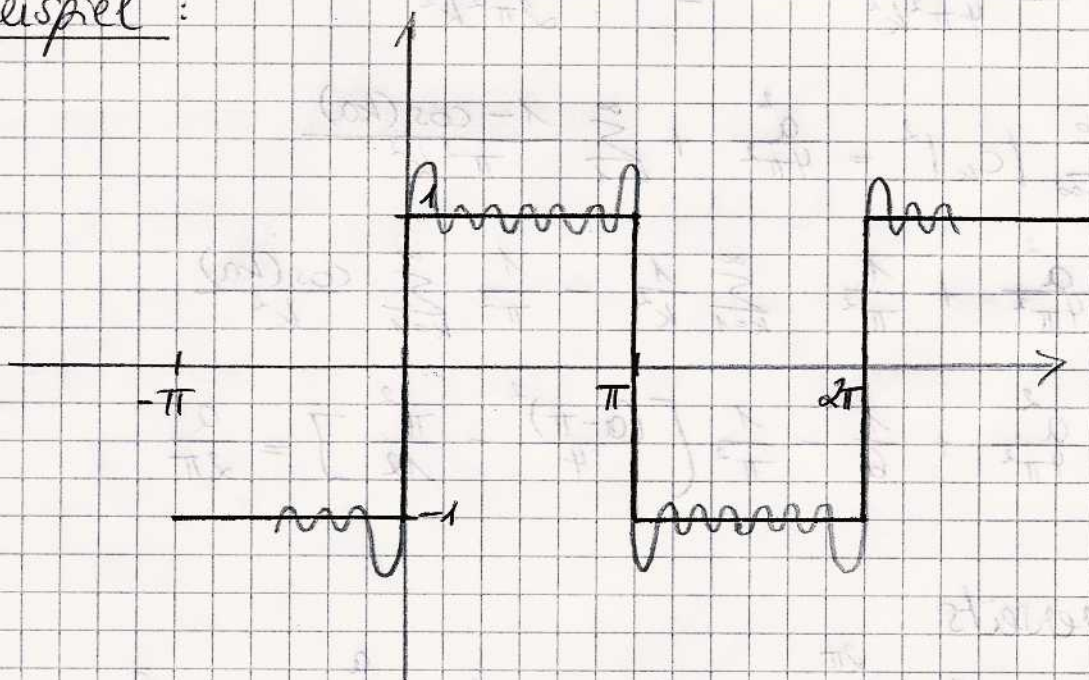
$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{144} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^4} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^4}{16} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi^5}{80} = \frac{\pi^4}{80}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 2 \left(\frac{\pi^4}{80} - \frac{\pi^4}{144} \right) = \frac{\pi^4}{90}$$

17. Hilfssatz

Satz 13 gilt für periodische Treppenfunktionen.

Beispiel:



Beweis:

Es genügt, den Spezialfall $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < a \\ 0 & \text{für } a \leq x < 2\pi \end{cases} \quad \text{zu betrachten.}$$

Denn andere Treppenfunktionen sind Linearkombinationen von solchen und $\|\cdot\|_2$ genügt der Δ -Ungleichung.

Fourier-Koeffizienten von f sind

$$C_0 = \frac{a}{2\pi}, \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-ikx} dx = \frac{i}{2\pi k} (e^{-ika} - 1)$$

$\Rightarrow$ Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} |C_k|^2 &= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \cdot (e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1) \\ &= \frac{2(1 - \cos(ka))}{4\pi^2 k^2} = \frac{1 - \cos(ka)}{2\pi^2 k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(ka)}{\pi^2 k^2} \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ka)}{k^2} \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right] = \frac{a}{2\pi} \end{aligned}$$

Andererseits

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^a 1 dx = \frac{a}{2\pi}$$

$\Rightarrow$ Besselsche Ungleichung ist eine Gleichung.

$$\Rightarrow \left\| f - \sum_{k=-n}^n C_k e^{ikx} \right\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Beweis des allgemeinen Falls:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch, über $[0, 2\pi]$ integrierbar

$\Rightarrow f$ beschränkt, $\exists f$ fast überall und $|f| \leq 1$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f integrierbar ist

$\exists$ Treppenfunktionen auf $[0, 2\pi]$ mit

$$1) \quad -1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$$

$$2) \quad \int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \frac{\pi}{4} \varepsilon^2$$

Dann gilt für $g = f - \varphi$:

$$|g|^2 \leq |\psi - \varphi|^2 \leq 2(\psi - \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g|^2 dx \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\psi - \varphi) dx = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Es seien $S_{f,n}$, $S_{g,n}$, $S_{\varphi,n}$ die n -ten Partialsummen der Fourier-Reihen von f , g bzw. φ .

Dann gilt:

$$S_{f,n} = S_{g,n} + S_{\varphi,n}$$

Nach HS17 $\exists N$, so daß

$$\|\varphi - S_{\varphi,n}\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$$

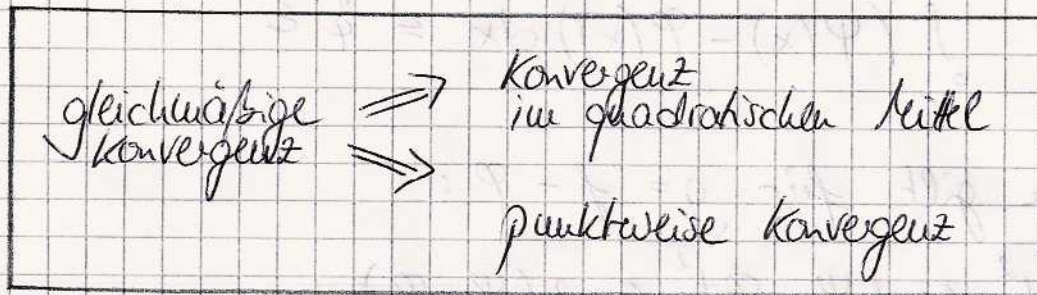
Nach HS10 gilt

$$\|g - S_{g,n}\|_2^2 \leq \|g\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\Rightarrow \|g - S_{g,n}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|f - S_{f,n}\|_2 &\leq \|g - S_{g,n}\|_2 + \|\varphi - S_{\varphi,n}\|_2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

Wie hängen die verschiedenen Konvergenzbegriffe zusammen?

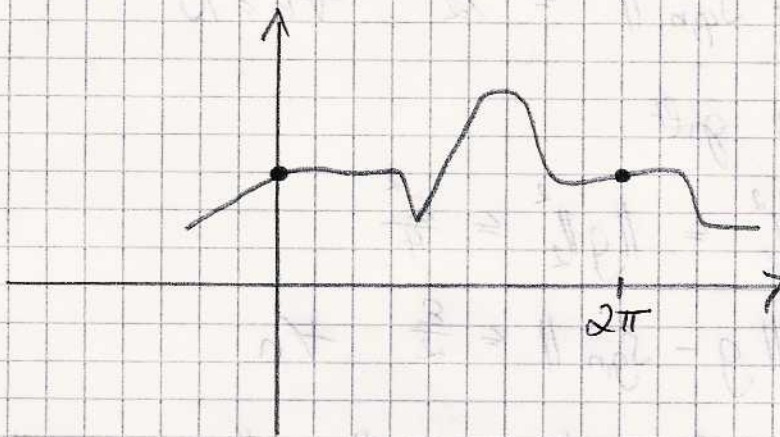


Weitere Implikationen gibt es nicht.

18. Satz

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodische Funktion, die stetig
und stückweise stetig differenzierbar ist,
d.h. $\exists$ Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 2\pi$,
so daß $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar ist.

z.B.



Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f
gleichmäßig gegen f .

Beweis:

Es sei $\varphi_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Ableitung von $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ und $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die periodische Funktion mit $\varphi|_{[t_{j-1}, t_j]} = \varphi_j$.

Für die Fourier-Koeffizienten γ_k von φ gilt nach Bessel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 \leq \|\varphi\|_2^2 < \infty$$

Für $k \neq 0$ lassen sich die Fourier-Koeffizienten c_k von f aus denen von φ vermöge partieller Integration bestimmen:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x) \cos(kx) dx - i \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x) \sin(kx) dx$$

$$= \frac{1}{k} f(x) \sin(kx) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \frac{1}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x) \sin(kx) dx \\ + \frac{i}{k} f(x) \cos(kx) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \frac{i}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x) \cos(kx) dx$$

$$= \frac{i}{k} f(x) e^{-ikx} \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \frac{i}{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x) e^{-ikx} dx$$

$$\Rightarrow c_k = \sum_{j=1}^T \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x) e^{-ikx} dx = 0 - \frac{i}{k} \cdot \gamma_k$$

$$\text{Also } c_k = -\frac{i}{k} \cdot \gamma_k$$

$$\text{Da } |\alpha/\beta| = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\text{folgt } |c_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \gamma_k^2 \right)$$

$$\sum \frac{1}{k^2} < \infty, \sum |g_k|^2 < \infty \quad (\text{von } x \text{ unabhängige Majorante})$$

$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ konvergiert absolut und gleichmäßig.

Sei $g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ der Grenzwert

$\Rightarrow g$ stetig

Außerdem:

Die Fourier-Reihe konvergiert auch im quadratischen Mittel gegen g (Multiplikation).

Nach Satz 13 konvergiert die Fourier-Reihe auch im Mittel gegen f .

$$\Delta\text{-Gleichung} \Rightarrow \|g - f\|_2 = 0$$

Da g und f stetig sind, folgt: $|g - f|^2 = 0$

$$\Rightarrow g = f$$

Ausblick

Die Techniken der Fourier-Reihen spielen in ähnlicher Form (z.B. bei wavelets) eine Rolle in

- partiellen Differentialgleichungen
 - Integralgleichungen (Computertomographie)
- } Bildverarbeitung

Dabei tauchen einige Begriffe auf, die wir nun definieren

19. Definition (Prä-Hilbertraum)

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Ein Prä-Hilbertraum ist ein Vektorraum V zusammen mit einem positiv definiten Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K.$$

Mit

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

wird die zugehörige Norm bezeichnet.

V heißt Hilbertraum, wenn V bzgl. des durch $\|\cdot\|_2$ definierten Konvergenzbegriffs vollständig ist.

D.h. jede Cauchy-Folge (f_n) aus V konvergiert.

(f_n) ist Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_2$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ so daß $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$.

(f_n) konvergiert gegen f bzgl. $\|\cdot\|_2$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

20. Beispiele

Der Raum ℓ_2 von Folgen in $\mathbb{K}$.

$$\ell_2 = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$$

Auf ℓ_2 haben wir ein Skalarprodukt

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} b_k \quad \text{mit } a = (a_n), b = (b_n)$$

Dies konvergiert absolut, denn die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in $\mathbb{K}^n$ gibt

$$\sum_{k=1}^n |a_k| |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \|a\|_2 \cdot \|b\|_2 < \infty$$

$$\text{mit } \|a\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Insbesondere

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\|_2 \cdot \|b\|_2 \quad \text{Cauchy-Schwarz in } \ell_2$$

Die Folgen $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots)$

$$e_{jk} = \delta_{jk}$$

bilden ein Orthonormalsystem in ℓ_2 .

Fourier-Reihen

$\mathcal{C}[0, 2\pi]$ periodisch $\rightarrow \ell_2$

$$f \mapsto (c_k)$$

$$\text{mit } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

ℓ_2 ist vollständig, $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ periodisch nicht.

(21) Definition (normierter Raum)

Ein normierter Raum ist ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum V mit einer Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$a) \|f\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \in V$$

$$b) \|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \quad \lambda \in \mathbb{K}, f \in V$$

$$c) \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

(22) Beispiele

$$a) V = \mathbb{K}^n \ni a = {}^t(a_1, \dots, a_n)$$

$$\|a\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

ist eine Norm

$$\|a\|_\infty = \max \{ |a_j| \mid j=1, \dots, n \} \quad \text{für } p = \infty$$

$\mathbb{K}^n$ ist bzgl. aller dieser Normen vollständig.

$$b) V = \mathcal{C}[a, b] \quad \text{stetige Funktionen } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \max \{ |f(x)| \mid x \in [a, b] \} \quad p = \infty$$

Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathcal{C}[a, b]$ ist die gleichmäßige Konvergenz.

$\mathcal{C}[a, b]$ mit dieser Norm ist vollständig, da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist.

Bzgl. $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p < \infty$ ist dies nicht der Fall,
z.B. für $p=2$ haben wir Konvergenz im Mittel
gegen Sprungfunktionen betrachtet.

Die Vervollständigung heißt

$$L^p[a,b] = \frac{\{\|\cdot\|_p - \text{Cauchy-Folgen}\}}{\{\|\cdot\|_p - \text{Nullfolgen}\}}$$

§ 30 Matrixnormen und EW-Abschätzungen

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

1. Definition (Matrixnorm)

Eine Matrixnorm auf $M(n \times n, \mathbb{K})$ ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : M(n \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

- a) $\|A\| > 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \in M(n \times n, \mathbb{K})$
- b) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
- c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- d) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (submultiplikativ)

2. Beispiele

$A \in M(n \times n, \mathbb{K})$

- a) Gesamtnorm : $\|A\|_G = n \cdot \max_{j,k} |a_{jk}|$
- b) Zeilensummennorm : $\|A\|_2 = \max \left\{ \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \mid j=1, \dots, n \right\}$
- c) Spaltensummennorm : $\|A\|_s = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{jk}| \right\}$
- d) Frobeniusnorm : $\|A\|_F = \left(\sum_{j,k} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}$
- e) Spektralnorn : $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A \cdot A')}$

dabei ist für B symmetrische Matrix

$$\lambda_{\max}(B) = \max \{ |\lambda_j| \mid \lambda_j \text{ ist EW von } B \}$$

Ist A symmetrisch, dann gilt $\|A\|_2 = \lambda_{\max}(A)$

③ Definition (kompatibel)

Eine Matrixnorm $\|A\|$ heißt kompatibel mit einer Vektornorm $\|\cdot\|: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\|A v\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$$

④ Beispiele

Für die p -Norm auf $\mathbb{K}^n$, $1 \leq p < \infty$, gilt:

$$\begin{aligned} (p\text{-Norm: } \|x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \\ \|x\|_\infty &= \max |x_j| \end{aligned}$$

a) $\|A\|_1, \|A\|_\infty$ sind kompatibel zu $\|x\|_1$
(Betragssummennorm)

b) $\|A\|_1, \|A\|_F, \|A\|_2$ sind verträglich mit der euklidischen Norm $\|x\|_2$.

c) $\|A\|_1, \|A\|_2$ sind verträglich mit $\|x\|_\infty$
(Maximumnorm)

Beweis:

Wir zeigen die Verträglichkeit von $\|A\|_1$ mit $\|x\|_\infty$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_j \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \\ &\leq \max_j \left\{ \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \cdot |x_k| \right\} \quad \Delta\text{-Ungleichung} \\ &\leq \max_j \left\{ \sum_{k=1}^n \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot \max_k |x_k| \right\} \\ &= n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty = \|A\|_1 \cdot \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Es gibt zu den zu einer Vektornorm verträglichen
Matrixnormen eine beste:

(5) Definition (zugehörige Matrixnorm)

Sei $\|x\|$ Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$.

Dann heißt $\|A\| = \max_{x \in \mathbb{K}^n, \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$

die zugehörige Matrixnorm.

(6) Beispiele

Vektornorm		zugehörige Matrixnorm	
Betragssummennorm	$\ x\ _1$	$\ A\ _1$	Spaltensummennorm
euklid. Norm	$\ x\ _2$	$\ A\ _2$	Spektralnrm
Maximumnorm	$\ x\ _\infty$	$\ A\ _\infty$	Zeilensummennorm

Beweis für $\|x\|_\infty$:

zugehörige Matrixnorm ist

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\max_j \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \right) \\ &= \max_j \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \right) = \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right) \\ &= \|A\|_\infty\end{aligned}$$

⑦ Satz (Eigenwertabschätzung mit Matrixnormen)

$A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ EW, $\|A\|$ Matrixnorm
verträglich mit $\|x\|$.

Dann gilt $|\lambda| \leq \|A\|$

Beweis:

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ zugehöriger EV. Dann gilt

$$Av = \lambda v, \text{ also } |\lambda| \cdot \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$$
$$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|, \text{ da } \|v\| \neq 0.$$

⑧ Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 2 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 3 \cdot \max |a_{jk}| = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\|A\|_2 = \max \{1.2, 2.4, 3.2\} = 3.2$$

$$\|A\|_\infty = \max \{1.2, 2.1, 3.5\} = 3.5$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (0.1)^2 + (-0.1)^2 + 2^2 + (0.4)^2 + (0.2)^2 + 3^2} = \sqrt{14.22} \approx 3.77$$

$\Rightarrow \|A\|_2 = 3.2$ liefert die beste Abschätzung.

Tatsächlich:

$$\lambda_1 \approx 3.0060$$

$$\lambda_2 \approx 2.0078$$

$$\lambda_3 \approx 0.9862$$

Eine Aussage über alle EW macht

⑨ Satz (Satz von Gerschgorin)

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$.

a) Sei $K_j = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{kj}|\}$

Dann sind sämtliche EW von A in der Vereinigung $\bigcup_{j=1}^n K_j$ enthalten.

b) Jede Zusammenhangskomponente der Vereinigung aus m Kreisen enthält mit Vielfachheit gezählt genau m EW.

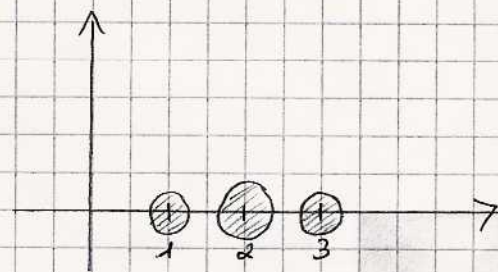
⑩ Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 2 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{\mu \mid |\mu - 1| \leq 0.2\}$$

$$K_2 = \{\mu \mid |\mu - 2| \leq 0.4\}$$

$$K_3 = \{\mu \mid |\mu - 3| \leq 0.2\}$$



Da $0 \notin \bigcup K_j$, ist A invertierbar

Die Menge aller EW von

(1) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (symmetrisch)

ist $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $\lambda_1, \lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$

Dann sind λ_1, λ_2 die EW von A in der

Normierung $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ mit

für die Parameterdarstellung der Normierung
 aus $\cos 2\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\sin 2\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 gewählt, dann in EW

(3) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da A symmetrisch ist, ist A invertierbar