

KAPITEL: ANALYSIS IM $\mathbb{R}^n$

§ 31 Kurven im $\mathbb{R}^n$

① Definition (Kurve)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Eine Kurve ist eine stetige Abbildung

$$f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

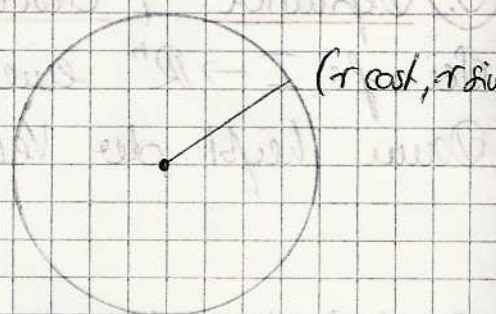
Sind alle f_k stetig differenzierbar, dann heißt f stetig differenzierbare Kurve.

② Beispiele

a) $r > 0$,

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = (r \cos t, r \sin t)$$



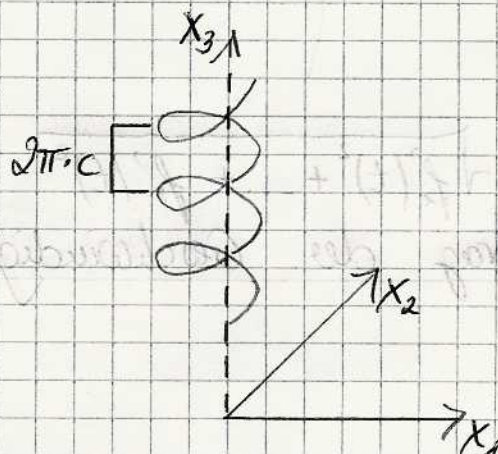
b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$ Punkt, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Richtungsvektor.

Dann ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t) = a + t \cdot v$ eine Gerade.

c) Schraubenlinie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

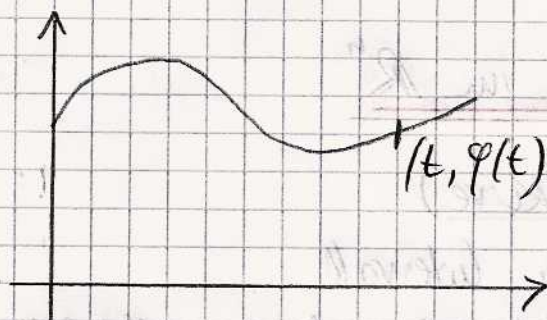
$$f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$$



d) $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion.

Dann beschreibt die Kurve

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, \varphi(t))$ den Graphen



Häufig ist folgende Interpretation:

$t \in I$ beschreibt die Zeit,

$f(t)$ beschreibt die Position eines Punktes zum Zeitpunkt t .

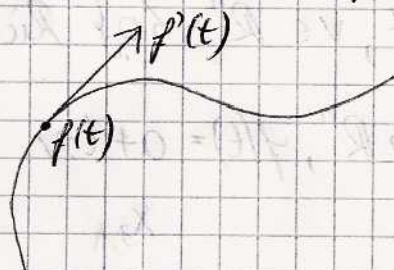
③ Definition (Geschwindigkeitsvektor)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve.

Dann heißt der Vektor

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$$

Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t .



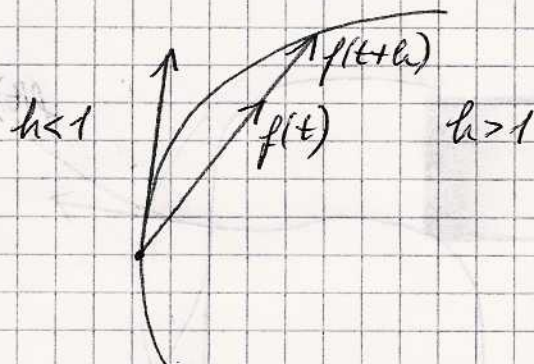
$$\|f'(t)\| = \sqrt{f_1'(t)^2 + \dots + f_n'(t)^2}$$

(euklid. Norm)

heißt Betrag der Geschwindigkeit.

Geometrisch lässt sich $f'(t)$ als skalierte Sekante für $h \rightarrow 0$ interpretieren.

$$f'(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$



④ Bemerkung

Kurven $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind nicht notwendig injektiv.

Bsp.:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$

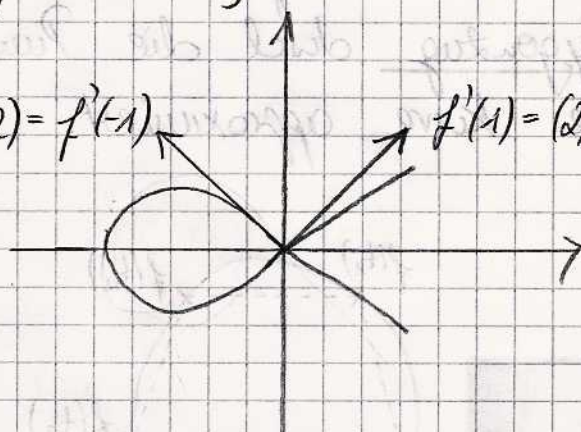
$$f(\mathbb{R}) = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 + x^3\}$$

$$f(1) = f(-1)$$

$$f'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$$

$$(-2, 2) = f'(-1)$$

$$f'(1) = (2, 2)$$



b) Neilische Parabel

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = (t^2, t^3)$$

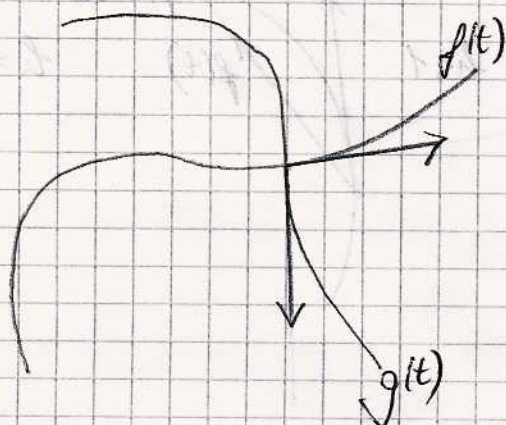
$$f(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid y^2 = x^3\}$$

$$f'(0) = (2t, 3t^2) \xrightarrow{t=0} (0, 0)$$



5. Schnittwinkel

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Kurven mit $f(t_0) = g(t_1)$

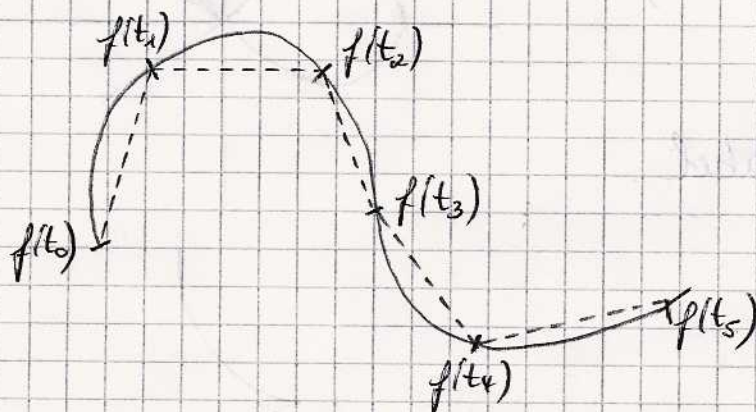


mit $f'(t_0) \neq 0$,
 $g'(t_1) \neq 0$

Dann heißt $\vartheta \in [0, 2\pi]$ mit $\cos \vartheta = \frac{\langle f'(t_0), g'(t_1) \rangle}{\|f'(t_0)\| \cdot \|g'(t_1)\|}$
der Winkel zwischen f und g in p .

6. Polynomapproximation

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $a = t_0 < \dots < t_r = b$ eine Unterteilung. Dann können wir hoffen, daß der Polygonzug durch die Punkte $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_r)$ die Kurve approximiert.



Die Länge dieses Polygonzugs ist

$$P_f(t_0, \dots, t_r) = \sum_{k=1}^r \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

⑦. Definition (rekthifizierbar)

Eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt rekthifizierbar mit Länge L , wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass

für jede Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_r = b$ mit Feinheit $< \delta$ gilt:

$$|P_f(t_0, \dots, t_r) - L| < \varepsilon$$

Polygonlänge und Länge unterscheiden sich um weniger als ε .

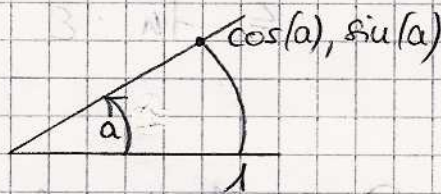
⑧. Satz

Jede stetig differenzierbare Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rekthifizierbar und $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

L heißt Bogenlänge von f .

⑨. Beispiele

a) $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$



$$L = \int_0^a \|f'(t)\| dt = \int_0^a \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^a 1 dt = a$$

Insbesondere:

Umfang von Kreis mit Radius r

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = 2\pi r$$

Für den Beweis von Satz 8 brauchen wir

10. Hilfssatz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

Dann gilt

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so daß

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| \leq \varepsilon$$

$\forall t, \tau \in [a, b]$ mit $|t - \tau| < \delta$.

Beweis:

Die Komponentenfunktionen $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar, deshalb ist f_i' auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig, d. h.

für $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so daß $|f_i'(t) - f_i'(s)| \leq \varepsilon$

$\forall t, s \in [a, b]$ mit $|t - s| < \delta$.

Nach dem Mittelwertsatz existiert s_i zwischen t und τ ,
so daß $\frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t - \tau} = f_i'(s_i)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| &\leq \sqrt{n} \max_i (f_i'(s_i) - f_i'(t)) \\ &\leq \sqrt{n} \cdot \varepsilon \quad \text{wenn } |t - \tau| \leq \delta \end{aligned}$$

Beweis von Satz 8:

$\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Dann läßt sich das Integral durch Riemannsche Summen approximieren:

d.h. $\exists \delta_1 > 0$, so daß für Unterteilungen
 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ mit Feinheit $\leq \delta_1$ gilt:

$$(1) \quad \left| \sum_{k=1}^r \|f'(t_k)\| (t_k - t_{k-1}) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mit dem Hilfssatz existiert ein $\delta \leq \delta_1$, so daß

$$\left\| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - f'(t_k) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

falls $|t_k - t_{k-1}| \leq \delta$.

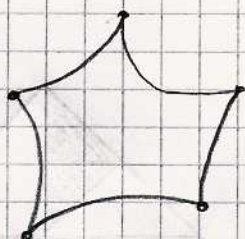
$$\Rightarrow \|f(t_k) - f(t_{k-1}) - f'(t_k)(t_k - t_{k-1})\| \leq \frac{\varepsilon(t_k - t_{k-1})}{2(b-a)}$$

Summation, (1) und Δ -Ungleichung ergeben

$$(2) \quad \left| \sum_{k=1}^r \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

11. Korollar

Jede stückweise stetig diffbare Kurve ist rektifizierbar.

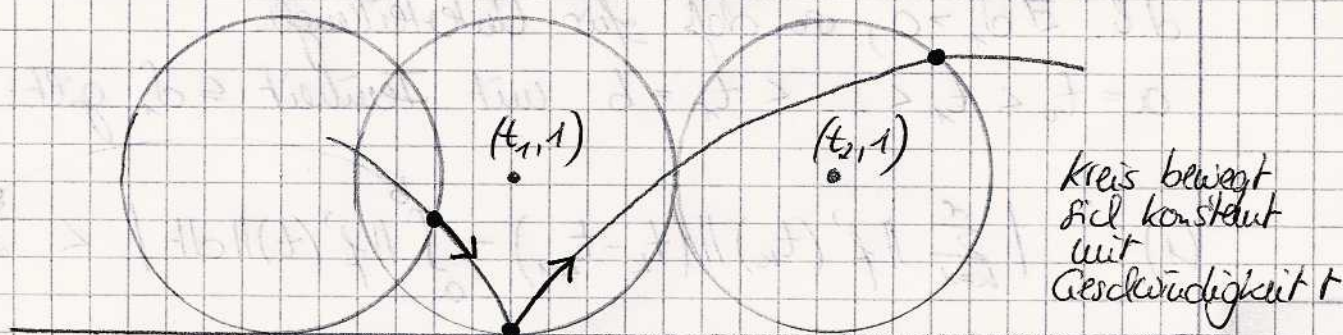


12. Beispiel

Die Zykloide:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

beschreibt Bewegung eines Punktes auf einem rollenden Rad.



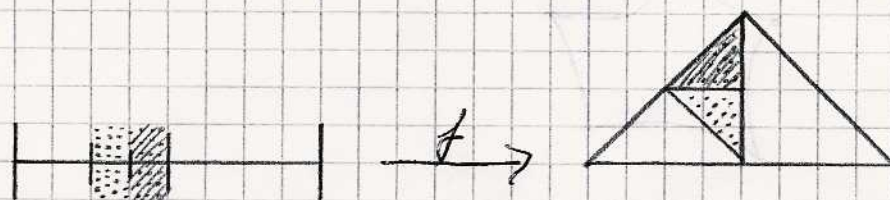
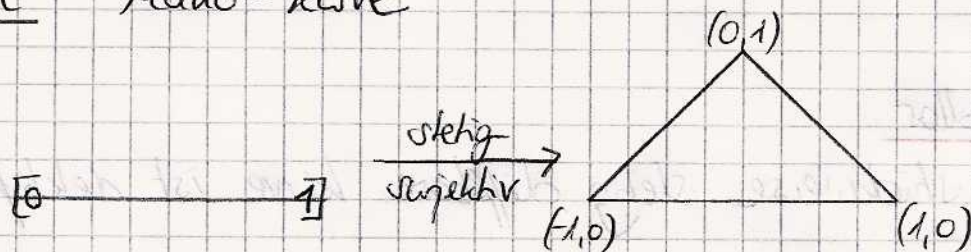
$$f'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

$$\|f'(t)\|^2 = ((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t) = 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$$

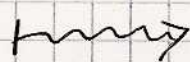
$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = 2 \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| dt & u = \frac{t}{2}, dt = 2du \\ &= 4 \int_0^{\pi} \sin u du = 8 \end{aligned}$$

Ist jede Kurve rektifizierbar? Antwort: NEIN

Beispiel: Peano-Kurve

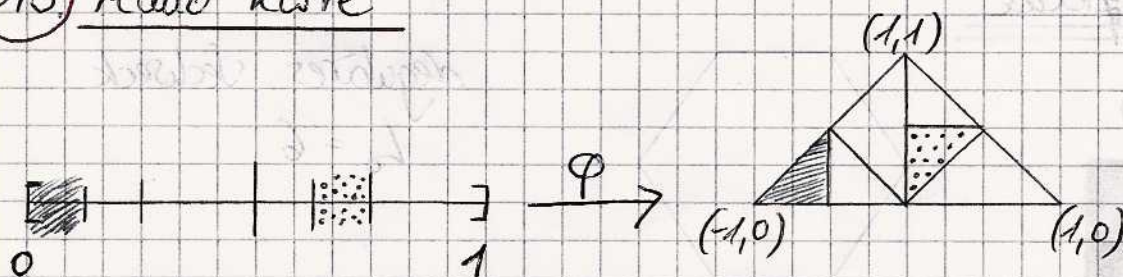


Jeder Punkt hat eine Intervallschachtelung in $[0, 1]$ mit solchen Intervallen



Durchschnitt der entsprechenden Schachtelung von Dreiecken.

13. Peano-Kurve



φ ist surjektiv und stetig.

Die Bilder $\varphi\left(\frac{k}{2^n}\right)$ mit $k=0, \dots, 2^n$ bilden die (spitzen) Ecken des n -ten Dreiecks.

Deren Abstände sind:

Abstand

$n=0$	2
$n=1$	$\sqrt{2}$
$n=2$	1
$\vdots$	$\vdots$
$n=2t$	$1/2^{t-1}$
$\vdots$	$\vdots$

Bilden wir nun das Polygon mit Ecken $\varphi\left(\frac{k}{2^{2t}}\right)$ mit $k=0, \dots, 2^{2t}$, dann ist

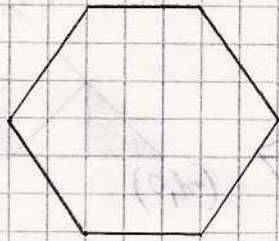
$$L_{2t} = 2^{2t} \cdot \frac{1}{2^{t-1}} = 2^{t+1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow$ Die Peano-Kurve ist nicht rektifizierbar.

Weiteres Beispiel:

Schneeflocke

$n=0$

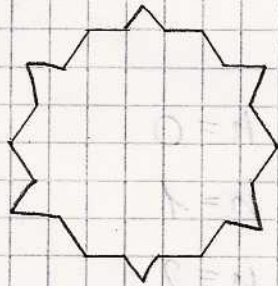


reguläres Sechseck
 $L_0 = 6$



— durch — ersetzen

$n=1$



$$L_1 = 6 \cdot \frac{4}{3}$$

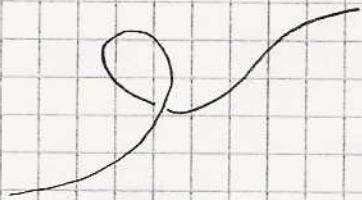
→ iterativ fortsetzen $\rightarrow L_n = 6 \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty$

14. Definition (Parameterwechsel)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (stetig diffbare) Kurve,
 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetig diffbare, streng
monotone, surjektive Abbildung.

Dann heißt φ ein Parameterwechsel und
 $f \circ \varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die durch diesen
Parameterwechsel entstandene Kurve.

z.B.:



f ist Kurve

Wir denken uns $f \circ \varphi$ als
den gleichen Weg, nur mit
anderer Geschwindigkeit durchlaufen.
(φ bestimmt die Geschwindigkeit)

Wir interessieren uns für Eigenschaften der Kurven, die nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängen.

15. Satz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbare Kurve,
 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ Parameterwechsel.

Dann haben f und $f \circ \varphi$ die gleiche Bogenlänge.

Beweis:

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

Bzgl. $f \circ \varphi$, $t = \varphi(u)$ haben wir

$$\tilde{L} = \int_{\alpha}^{\beta} \|(f \circ \varphi)'\| du$$

Nun

$$(f \circ \varphi)' = f'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \quad \text{nach Kettenregel}$$

$$\|(f \circ \varphi)'\| = \|f'(\varphi(u))\| \cdot \|\varphi'(u)\|$$

$$\left[(f_1' \circ \varphi) \varphi'(u)^2 + \dots + (f_n' \circ \varphi) \varphi'(u)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \|f'(\varphi(u))\| \cdot \|\varphi'(u)\|$$

$$\tilde{L} = \int_{\alpha}^{\beta} \|f'(\varphi(u))\| \cdot \|\varphi'(u)\| du$$

$$\begin{aligned} & \text{Substitutionsregel } t = \varphi(u), dt = \varphi'(u) du \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt = L \end{aligned}$$

16) Definition (Parametrisierung nach Bogenlänge)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig diffbare Kurve mit
 $f'(t) \neq 0 \quad \forall t$.

Dann ist die Funktion

$$\Psi(t) = \int_a^t \|f'(t)\| dt \quad \text{stetig diffbar}$$

mit Ableitung > 0 und definiert einen Parameterwechsel

$\Psi: [a, b] \rightarrow [0, L]$, wobei L die Bogenlänge der ganzen Kurve ist.

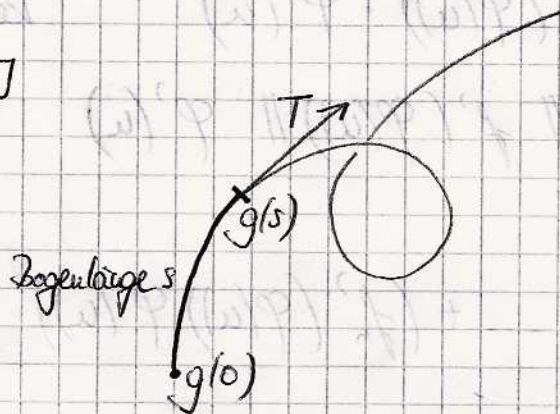
Sei $\varphi: [0, L] \rightarrow [a, b]$ die Umkehrfunktion.

Dann heißt

$$g = f \circ \varphi: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die Parametrisierung nach Bogenlänge.

$s \in [0, L]$



Es gilt

$$g'(s) = f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = f'(\varphi(s)) \cdot \frac{1}{\Psi'(\varphi(s))}$$

$$= \frac{f'(\varphi(s))}{\|f'(\varphi(s))\|}$$

$$\Rightarrow T = g'(s)$$

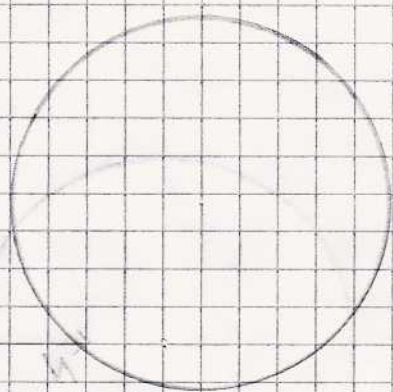
ist der normierte
Tangentenvektor

$$\int_{s_1}^{s_2} \|g'(s)\| ds = \int_{s_1}^{s_2} 1 \cdot ds = s_2 - s_1$$

daher der Name "Parametrisierung nach Bogenlänge".

17. Beispiel: $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f(t) = (r \cos t, r \sin t)$ Kreis mit Radius r



$$f'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2} = r$$

$$\varphi(t) = \int_0^t r dt = rt, \quad \varphi(s) = \frac{s}{r}$$

$$g: [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

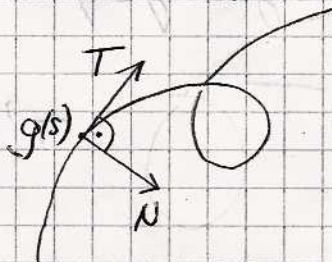
$$g(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}\right)$$

18. Definition (normierter Tangentialvektor, Krümmung)

Sei $g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$T = g'(s)$$

der normierte Tangentialvektor im Punkt $g(s)$.



$\kappa = \kappa(s) = \|T'(s)\|$ heißt die Krümmung der Kurve im Punkt $g(s)$.

$N(s) = T'(s)/\kappa(s)$ heißt normierter Normalenvektor, wohldefiniert, wenn $\kappa(s) \neq 0$.

Es gilt $\langle N, T \rangle = 0$,

denn $\langle T, T \rangle = 1 \Rightarrow \langle T', T \rangle + \langle T, T' \rangle = 0$
 $\parallel$
 $2K \langle N, T \rangle$

Beispiel:

a) Die Krümmung von Kreis mit Radius r ist überall $K = \frac{1}{r}$.

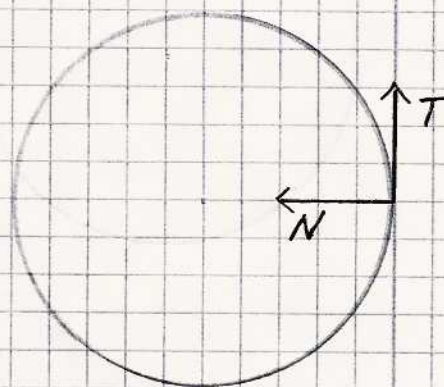
Parametrisierung nach Bogenlänge

$$g(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right)$$

$$T = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$$

$$T' = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right)$$

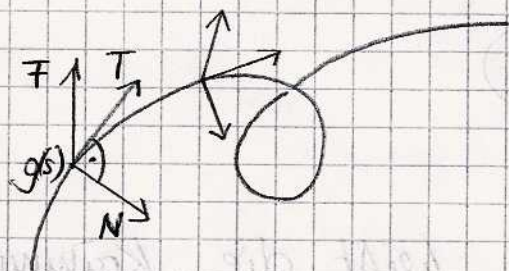
$$K = \|T'\| = \frac{1}{r}$$



b) $g(s) = a + s \cdot v$, $\|v\| = 1$, $K = 0$
Gerade hat Krümmung 0.

19. Raumkurven

Sei $g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve.



$$T' = K \cdot N$$

Sei $F \in \mathbb{R}^3$ zu T und N ein normierter, senkrechter Vektor, so daß $(T, N, F) \in \text{SO}(3)$.

T, N, F : Fresnelsches Dreibein

Wie testet man, ob g ebene Kurve ist?

Antwort : F hängt nicht von $s \in [0, L]$ ab.

20) Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Es seien $a = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $b = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$
zwei Vektoren.

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

heißt Kreuzprodukt von a und b .

Elementare Eigenschaften

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$$

$$(a+c) \times b = a \times b + a \times c$$

$$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b) = a \times (\lambda b) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$a \times b = -b \times a$$

21) Satz (wesentliche Eigenschaften)

$a, b \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

1) $a \times b$ steht senkrecht auf a und auf b .

2) $\|a \times b\|$ ist die Größe des Parallelogramms

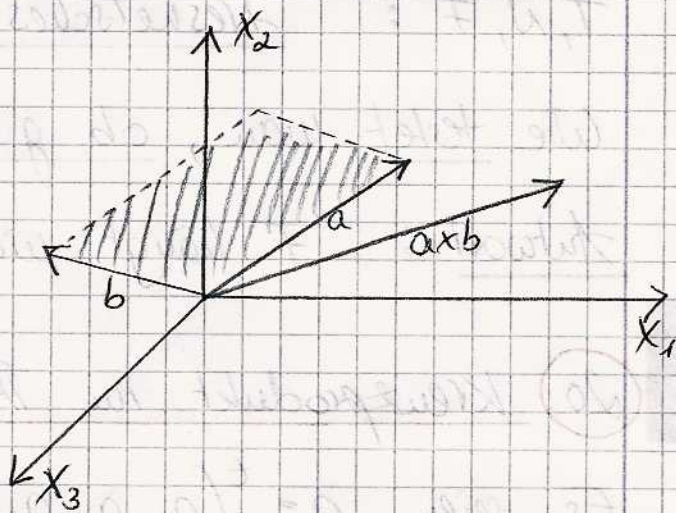
$$P = \{\lambda a + \mu b \mid 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1\}$$

3) $\det(a, b, a \times b) = \underline{\|a \times b\|^2} \geq 0$.

Beispiel:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a \times b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Beweis:

1) Betrachte die Determinante

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ &\quad - a_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ &\quad + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= \langle a, a \times b \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a \perp a \times b$$

$$\text{analog } b \perp a \times b$$

$$3) \det(a, b, a \times b) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_2 & b_2 & -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_3 & b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + \dots = \|a \times b\|^2$$

$$\begin{aligned} 2) \det(a, b, a \times b) &= \text{Volumen des Parallelotops} \\ &\quad \text{aufgespannt von } a, b, a \times b. \\ &= \|a \times b\| \end{aligned}$$

Fläche von $\{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\}$

$$\Rightarrow 2)$$

22. Frenetsches Dreiein

$$T, N = k \cdot T' = T \times N$$

$$\Rightarrow T, N, F \in \mathcal{SO}(3)$$

Lemma:

$$F' = \tau(s) \cdot N(s)$$

τ heißt Torsion der Kurve im Punkt $g(s)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

Schraubenlinie

$$f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{r^2 + c^2} =: d$$

$$g(s) = \left(r \cos \frac{s}{d}, r \sin \frac{s}{d}, \frac{c}{d}s\right)$$

$$T = \left(-\frac{r}{d} \sin \frac{s}{d}, \frac{r}{d} \cos \frac{s}{d}, \frac{c}{d}\right)$$

$$\|T\| = \left(\frac{r^2}{d^2} + \frac{c^2}{d^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{r^2 + c^2}{d^2}} = 1$$

Krümmung

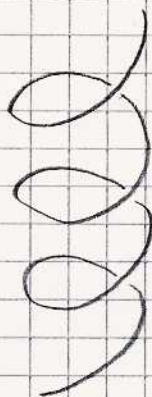
$$T' = \left(-\frac{r}{d^2} \cos \frac{s}{d}, -\frac{r}{d^2} \sin \frac{s}{d}, 0\right)$$

$$K = \|T'\| = \frac{r}{d^2} = \frac{r}{r^2 + c^2}$$

$$N = \left(-\cos \frac{s}{d}, -\sin \frac{s}{d}, 0\right)$$

$$F = T \times N = \left(-\frac{c}{d} \sin \frac{s}{d}, \frac{c}{d} \cos \frac{s}{d}, \frac{c \cdot r}{d^2}\right)$$

$$F' = \left(-\frac{c}{d^2} \cos \frac{s}{d}, -\frac{c}{d^2} \sin \frac{s}{d}, 0\right) \Rightarrow \tau = \frac{c}{r^2 + c^2}$$



Früheres Problem

$$W \times T = F \times T = (G \times T)$$

$$(G \times T) \in F, G \times T \in G$$

Lemma:

Es ist $(G \times T)$ in G und $(G \times T)$ in F

Beweis:

mit Lemma

$$(G \times T, G \times T, G \times T) = (G \times T)$$

$$G = \frac{G \times T}{G \times T} = (G \times T)$$

$$\left(\frac{G}{G}, \frac{G}{G} \times T, \frac{G}{G} \times T \right) = (G \times T)$$

$$\left(\frac{G}{G}, \frac{G}{G} \times T, \frac{G}{G} \times T \right) = T$$

$$K = \frac{G \times T}{G \times T} = \frac{G}{G} \left(\frac{G}{G} + \frac{G}{G} \right) = \frac{G}{G}$$

Korollar:

$$\left(\frac{G}{G} \times T, \frac{G}{G} \times T, \frac{G}{G} \times T \right) = T$$

$$\frac{G}{G} \times T = \frac{G}{G} = \frac{G}{G} = \frac{G}{G}$$

$$\left(\frac{G}{G} \times T, \frac{G}{G} \times T, \frac{G}{G} \times T \right) = T$$

$$\left(\frac{G}{G}, \frac{G}{G} \times T, \frac{G}{G} \times T \right) = T \times T = T$$

$$\frac{G}{G} \times T = T \quad T = \left(\frac{G}{G}, \frac{G}{G} \times T, \frac{G}{G} \times T \right) = T$$

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{Raumkurve}$$

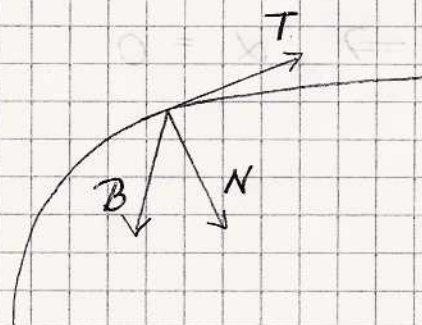
$$s = \psi(t) = \int_a^t \|f'(t)\| dt \quad \text{zugehörige Bogenlänge}$$

$$g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{Parametrisierung nach Bogenlänge}$$

$$T = g'(s) \quad \text{Tangentenvektor, } \|T\| = 1$$

$$T' = \kappa(s) \cdot N(s) \quad \begin{array}{l} N \text{ Normalenvektor, } \|N\| = 1 \\ \kappa \text{ Krümmung} \end{array}$$

$$B = T \times N \quad \text{Binormalenvektor}$$



Lemma

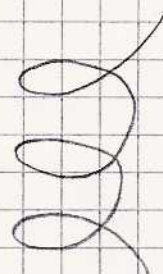
$$B' = \tau(s) \cdot N, \quad \tau \text{ heißt Torsion.}$$

Beispiel: Schraubenlinie

$$f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$$

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + c^2}$$

$$\tau = \frac{c}{r^2 + c^2}$$



Beweis des Lemmas:

$$B = T \times N \text{ hat Länge } 1$$

$$1 = \langle B, B \rangle \Rightarrow 0 = 2 \langle B', B \rangle$$

T, N, B Orthonormalbasis

$$\begin{aligned} B' &= \alpha T + \tau N + 0B \\ &= \alpha T + \tau N \end{aligned}$$

Wir müssen noch $\alpha = 0$ zeigen

$$\alpha = \langle T, B' \rangle = \langle T, (T \times N)' \rangle$$

$$\langle T, T \times N \rangle = 0, \text{ da } T \perp (T \times N)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \langle T', T \times N \rangle + \langle T, B' \rangle \\ &= \underbrace{\langle \kappa N, T \times N \rangle}_{=0} + \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

§ 32 Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

$D \subset \mathbb{R}^n$ Definitionsbereich

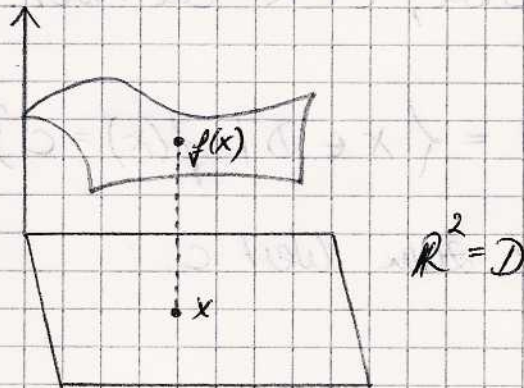
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion

Wie können wir uns f veranschaulichen?

1. Definition (Graph)

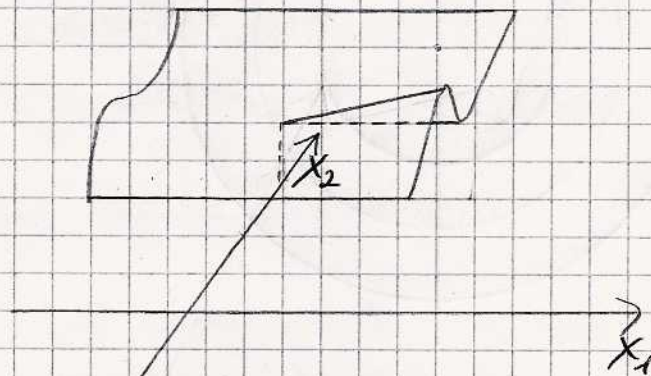
Der Graph von f ist

$$\Gamma_f = \{ (x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x) \}$$

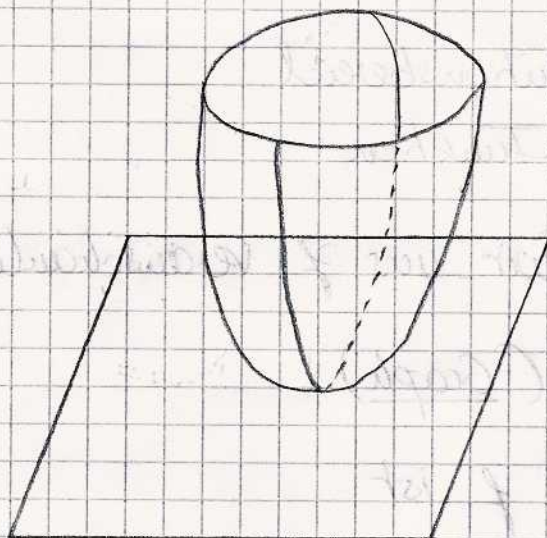


Beispiele:

a) $f(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1 x_2$



$$b) f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$$



2. Definition (Niveaumengen)

Sei $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $c \in \mathbb{R}$ ein Wert.

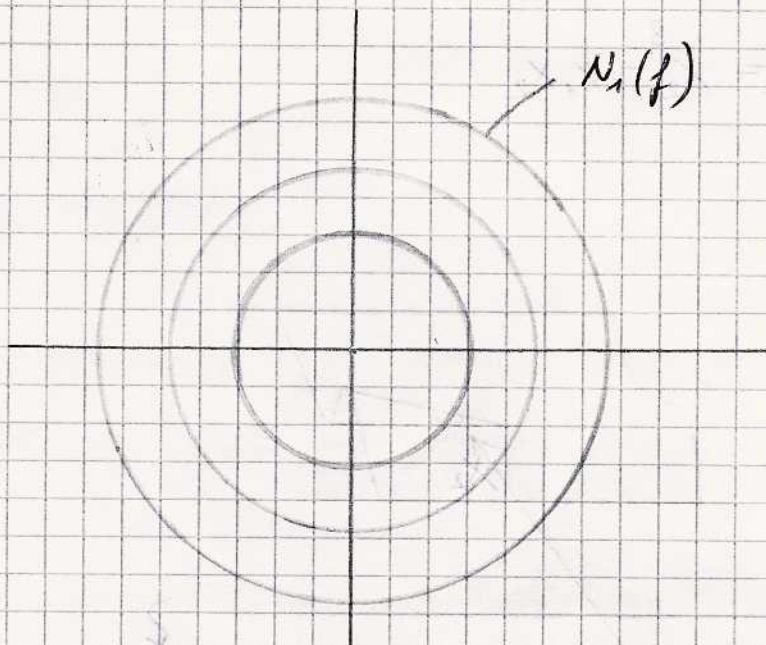
Dann heißt

$$N_c(f) = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) = c\}$$

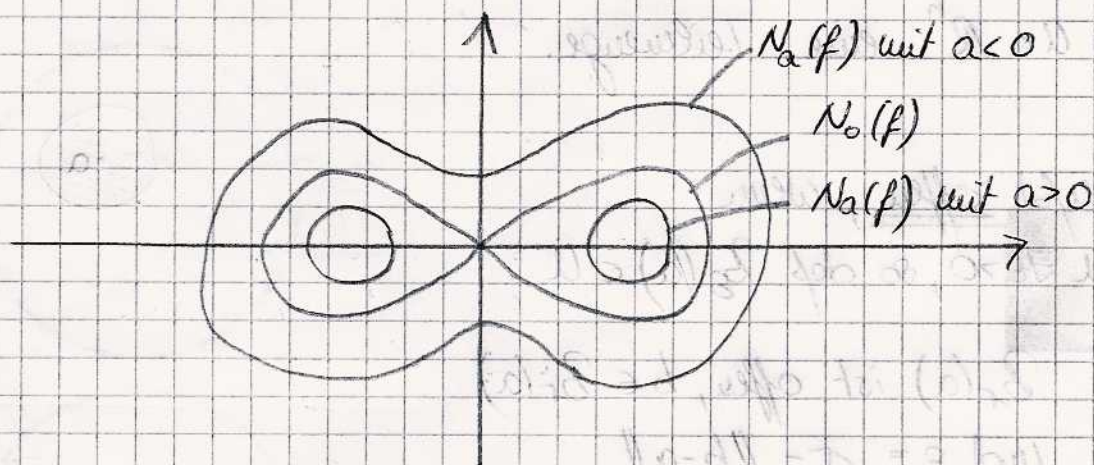
Niveaumenge von f zum Wert c .

Beispiele:

$$a) f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$$



$$b) f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - x_1^4$$



Bemerkung:

Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$ wird in den meisten Beispielen "guten" Voraussetzungen genügen.

③ Definition (offener, abgeschlossener Ball)

Zu $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ heißt

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

offener Ball mit Radius r um a ,

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

heißt abgeschlossener Ball mit Radius r um a .

④ Definitionen (offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

U heißt offen, wenn
 $\forall a \in U \exists \varepsilon > 0$, so daß $B_\varepsilon(a) \subset U$

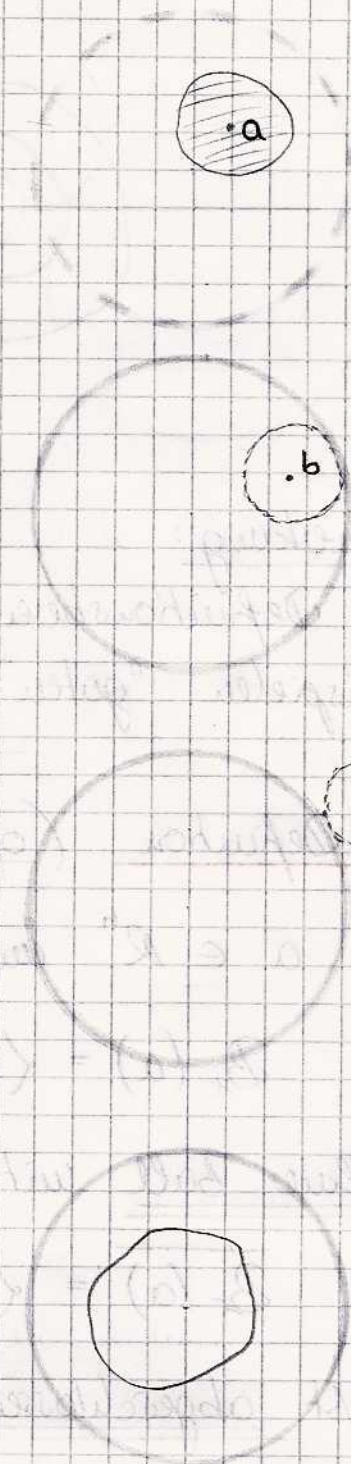
Bsp.: $B_r(a)$ ist offen, $b \in B_r(a)$
und $\varepsilon = r - \|b - a\|$,
so gilt $B_\varepsilon(b) \subset B_r(a)$

U heißt abgeschlossen, wenn
 $A = \mathbb{R}^n \setminus U$ offen ist.

Bsp.: $\overline{B_r(a)}$ ist abgeschlossen,
 $b \notin B_r(a)$, dann
 $B_\varepsilon(b) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(a)}$
für $\varepsilon = \|b - a\| - r > 0$

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt
beschränkt, wenn $R > 0$,
so daß $D \subset \overline{B_R(0)}$.

Eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge
 $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt.



In $D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig heißt

$$\mathring{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon = \varepsilon(x), \text{ so daß } B_\varepsilon(x) \subset D\}$$

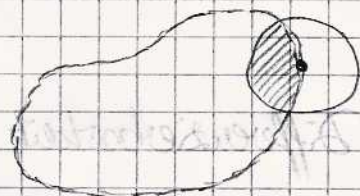
Menge der inneren Punkte

$$U \text{ offen} \Leftrightarrow \mathring{U} = U$$

$$\bar{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0\}$$

Abschluß von D .

$$A \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \bar{A} = A$$



$$\partial D = \bar{D} \setminus \mathring{D}$$

Rand von D

$$\text{Bsp.: } D = B_r(a), \mathring{B}_r(a) = B_r(a), \bar{D} = \overline{B_r(a)}$$

$$\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$$

Oberfläche des Balls

5. Definition (stetig in a)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion

f heißt stetig in $a \in D$, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so daß

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } \|x - a\| < \delta$$

6. Satz

Summen, Produkte und Quotienten (wo definiert) sind stetig

Beispiel:

$$\frac{2x_1^2 + x_2^4}{x_1^2 + x_2^2 + 1} = f(x_1, x_2) \quad \text{stetig auf } \mathbb{R}^n$$

f heißt stetig auf D , wenn f in allen $a \in D$ stetig ist.

• $\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} = f(x_1, x_2)$ stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Was passiert im Nullpunkt?

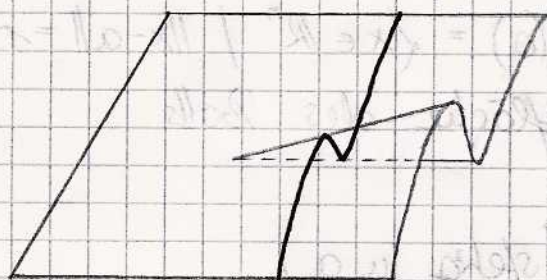
$$t \mapsto (t, 0) \mapsto f(t, 0) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

$$t \mapsto (t \cos \alpha, t \sin \alpha) \mapsto \frac{t^2 \cos \alpha \sin \alpha}{t^2} \neq 0$$

für $\alpha = k \frac{\pi}{2}$

Für Differenzierbarkeit gibt es zwei Konzepte, die den Fall von $n=1$ auf $n>1$ verallgemeinern:

partielle Differenzierbarkeit, totale Differenzierbarkeit



Eine Variable variiert, alle anderen konstant.

→ Funktion in einer Variablen, und die können wir differenzieren.

⑦ Definition (partiell diffbar)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Menge definierte Funktion. Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ ein Punkt.

f heißt in a partiell nach x_i differenzierbar, wenn die eingeschränkte Funktion $x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ in a_i diffbar ist, also

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i+h}, \dots, a_n) - f(a_i)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Ist f in allen $a \in U$ partiell nach x_i diffbar,
dann bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{die } i\text{-te partielle Ableitung.}$$

Beispiel:

a) $f(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1 x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 - x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -x_2$$

b) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ 0 & (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$

ist nicht stetig, aber partiell diffbar.

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist dies klar,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = [f(x_1, 0)]' = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$$

partiell diffbar $\nRightarrow$ stetig!

(P) Definition (Gradient)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ nach allen Variablen partiell differenzierbar.
Dann heißt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(a) =: \text{grad } f(a)$$

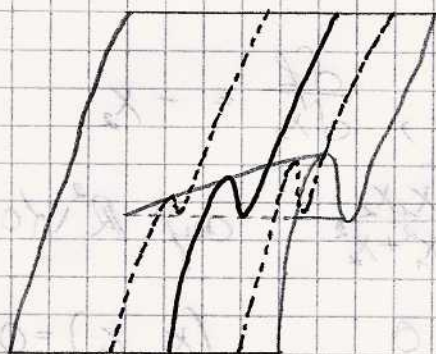
Gradient von f im Punkt $a \in U \subset \mathbb{R}^n$.

9. Definition (höhere partielle Ableitung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, f uach x_i auf U partiell diffbar
und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ uach x_j partiell diffbar.

Dann bezeichnet
$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

die 2-te partielle Ableitung.



Im Allgemeinen gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Andererseits : $f(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1 x_2$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} (3x_2^2 - x_1) = -1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} (-x_2)$$

10. Satz

Ist f 2-mal stetig partiell diffbar, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

11) Korollar

Für f 2-mal stetig partiell diffbar ist die
Hesse-Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \quad \text{symmetrisch.}$$

Beispiel

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ 0 & (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{(x_1^2 + x_2^2) [x_2 (x_1^2 - x_2^2) + 2x_1^2 x_2] - x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{x_2 (x_1^4 - x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

① Koeffizient

Der 1. und 2. Koeffizient sind die

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

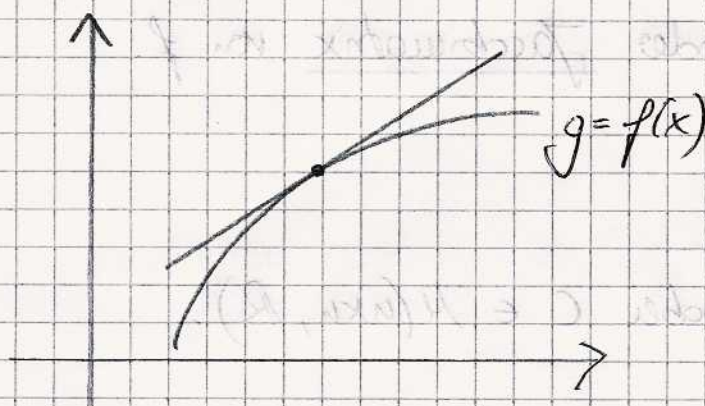
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Das zweite Konzept der Differentiation ist die Approximation durch eine lineare Funktion.



$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(Tangente durch Punkt approximiert am besten)

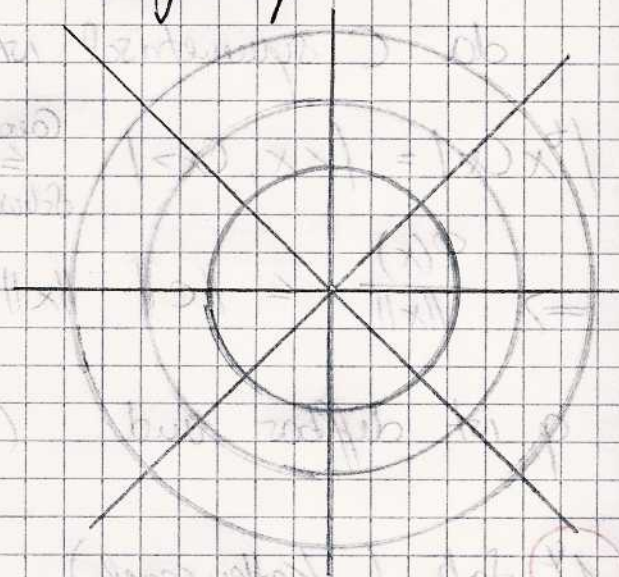
Wir verallgemeinern dies für Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Beispiel:

Polarkoordinaten

$$P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$



12. Definition (total differenzierbar)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ eine Abbildung. f heißt in $a \in U$ total differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung gibt, $x \mapsto Ax$, so daß für den Fehler φ , definiert durch

$$f(a+x) = f(a) + A \cdot x + \varphi(x)$$

für $x \in U$ nahe a gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = 0.$$

Anders: $\varphi(x) \in o(\|x\|)$

Die Matrix A heißt

$$Df(a) = J_f(a) := A$$

Differential oder Jacobimatrix von f .

13) Beispiel:

Sei $q(x) = {}^t x \cdot Cx$, wobei $C \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

$$q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q(x+a) = {}^t(x+a) C(x+a) = \underbrace{{}^t q(a)}_{=q(a)} + \underbrace{2 {}^t a C}_{=A} x + \underbrace{{}^t x C x}_{=q(x)}$$

da C symmetrisch ist.

$$|{}^t x C x| = |\langle x, Cx \rangle| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x\| \cdot \|Cx\| \leq \|C\| \cdot \|x^2\|$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{\|x\|} \leq \|C\| \cdot \|x\| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

q ist diffbar und $(Dq)(a) = 2 {}^t a C$

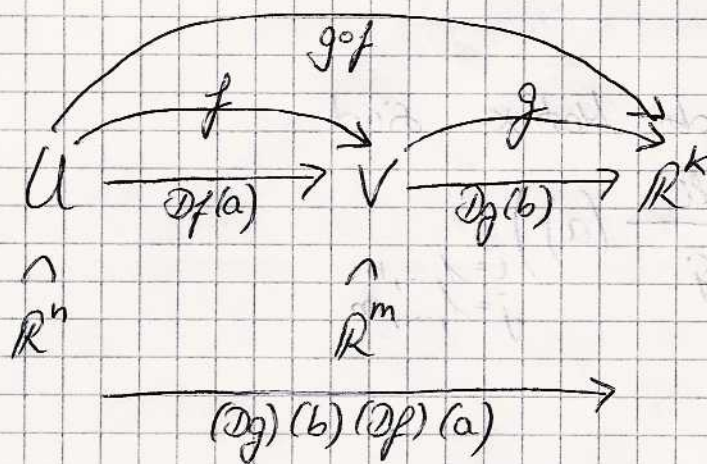
14) Satz (Kettenregel)

$$U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, g: V \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ und } f(a) \in V.$$

Ist f in $a \in U$ diffbar und g in $b = f(a)$ diffbar, dann ist $g \circ f$ in a diffbar und es gilt

$$D(g \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) (Df)(a)$$



Beweis:

Seien φ und ψ die Fehler.

Es gilt

$$f(a+x) = f(a) + \underbrace{Ax}_{\varphi} + \underbrace{\varphi(x)}_{\psi}$$

$$g(b+y) = g(b) + By + \psi(y)$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a+x) &= g(b) + B(Ax + \varphi(x)) + \psi(Ax + \varphi(x)) \\ &= c + BAx + \underbrace{B\varphi(x) + \psi(Ax + \varphi(x))}_{= \eta(x)} \end{aligned}$$

Wir müssen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\eta(x)\|}{\|x\|} = 0$ zeigen.

$$\frac{\|B\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq \|B\| \cdot \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \text{ da } f \text{ diffbar.}$$

Weil g diffbar ist, gilt $\|\psi(y)\| = k(y) \cdot \|y\|$

mit $k(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\|\psi(Ax + \varphi(x))\|}{\|x\|} &= \underbrace{k(Ax + \varphi(x))}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \cdot \underbrace{\frac{\|Ax + \varphi(x)\|}{\|x\|}}_{\leq \|A\| + \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \|A\|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

15 Korollar

Die Einträge der Jacobi-Matrix sind

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (a) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

Beweis

Betrachte Indexpaar (i, j) und die Abbildungen

$$e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, e(t) = a + t \cdot e_i$$

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto y_j$$

e und g sind linear und die Komposition

$$\frac{d}{dt} (g \circ f \circ e) = \frac{d}{dt} (f_j(a + t e_i))$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_j(a + t e_i) - f_j(a)}{t} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (a)$$

Andererseits gilt nach der Kettenregel

$$D(g \circ f \circ e) = D(g)(f(a)) D(f)(a) D(e)(0) = a_{ij}$$

$$\begin{matrix} (0 \dots 1 \dots 0) \\ \text{\scriptsize } j\text{-te} \\ \text{\scriptsize Stelle} \end{matrix} \quad \parallel \quad J_f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ } i\text{-te Position}$$

$$\text{wobei } A = J_f(a) = (a_{ij})$$

$$\Rightarrow J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (a) \right)$$



16. Korollar

Sei $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(U) \subset V$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ diffbare Funktion. $g(y) = g(y_1, \dots, y_m)$. $h = g \circ f$.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

17. Beispiel:

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$P|_{]0, \infty[\times]0, 2\pi[}$ ist injektiv.

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, h = g \circ P(r, \varphi) = r^2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 2r, \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0$$

$$DP = J_P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$Dg = (2x_1, 2x_2)$$

$$\begin{aligned} Dh &= Dg(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot DP(r, \varphi) \\ &= (2r \cos \varphi, 2r \sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = (2r, 0) \end{aligned}$$

18.

Zusammenhang zwischen partiell und total diffbar:

stetig partiell diffbar

$\Downarrow$
(total) diffbar $\Rightarrow$ stetig

$\Downarrow$
partiell diffbar

19. Definition (Richtungsableitung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion,
 $a \in U$ Punkt, $v \in \mathbb{R}^n$ Vektor (Richtung) mit $\|v\|=1$.
Dann heißt

$$(D_v f)(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h \cdot v) - f(x)}{h}$$

Ableitung von f in Richtung v .

20. Satz

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ in x diffbar. Dann gilt

$$(D_v f)(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle$$

Insbesondere ist

$D(f)(x)$ für v mit $\|v\|=1$, falls $\text{grad } f(x) \neq 0$,
genau dann maximal, wenn

$$v = \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$$

Mit anderen Worten:

Der Gradient von f zeigt in die Richtung des
stärksten Ausstiegs.

Bemerkung

→ Idee eines Algorithmus für Maxima

Beweis:

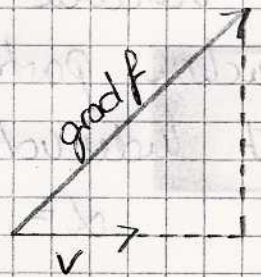
$$Df(x) = \text{grad } f(x)$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, g(t) = x + tv, Dg = v \in \mathbb{R}^n$$

$$Df(x) \cdot v = \langle \text{grad } f(x), v \rangle$$

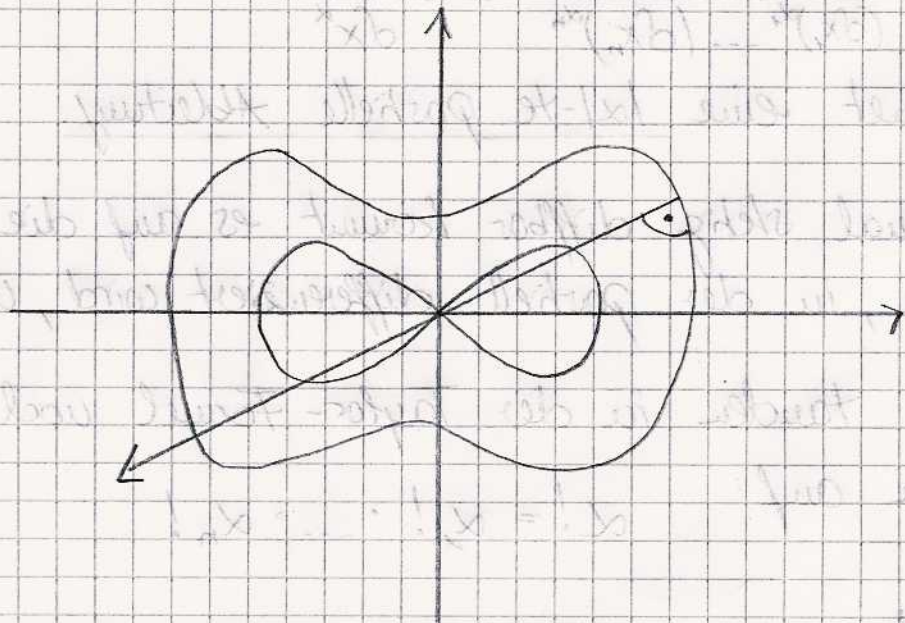
"

$$\frac{d}{dt} (f \circ g)(t) = D_v f(x)$$



Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - x_1^4$$



$$\text{grad } f = (2x_1 - 4x_1^3, -2x_2)$$

$$\text{grad } f(1, 1) = (-2, -2)$$

21. Taylorformel

↳ die $n=1$ ist die Darstellung

$$f(a+x) = f(a) + f'(a) \cdot x + \varphi(x)$$

war der erste Fall der Taylorformel.

Wir wollen die Taylorformel für $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, verallgemeinern. Dazu sei f k -mal stetig partiell diffbar.

Wir schreiben das Polynom in $x_1, \dots, x_n$ hin, das die gleichen partiellen Ableitungen in a hat wie f .
Mit Indexnotation wird die Formel einfach.

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

heissen wir Multiindex,

$$|\alpha| = \sum \alpha_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \text{Totalgrad.}$$

Dann sei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_n)^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$$

bezeichnet eine $|\alpha|$ -te partielle Ableitung.

Wegen k -mal stetig diffbar kommt es auf die Reihenfolge, in der partiell differenziert wird, nicht an.

Schließlich tauchen in der Taylor-Formel noch Fakultäten auf:

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

Dann ist

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

das k -te Taylorpolynom von f in a .

23. Satz (Taylorsche Formel)

Sei $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal stetig partiell diffbar. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ so klein, dass $\{a+tx \mid t \in [0,1]\} \subset U$. Dann gibt es für x ein $\vartheta \in [0,1]$, so dass

$$f(a+x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(a) \cdot x^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(a+\vartheta x) x^\alpha$$

gilt.

Beweisidee:

Wir wenden die Taylorformel in einer Variable auf die Funktion

$$g(t) = f(a+tx) \text{ an}$$

und verwenden die Formel

$$\frac{d^k g}{(dt)^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a+tx) x^\alpha,$$

welche mit Induktion nach k aus der Kettenregel folgt. ■

§ 3.3 (Differentialrechnung)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, $a+h \in D$.

Die Differenz $f(a+h) - f(a)$ ist die Änderung von f bei einer Änderung von a um h .

Die Differenz $f(a+h) - f(a)$ ist die Änderung von f bei einer Änderung von a um h .

Die Differenz $f(a+h) - f(a)$ ist die Änderung von f bei einer Änderung von a um h .

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

gilt

Beispiel

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist in $a=1$ zweimal differenzierbar.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist in $a=1$ zweimal differenzierbar.

$$f'(1) = 2, f''(1) = 2$$

Es gilt also:

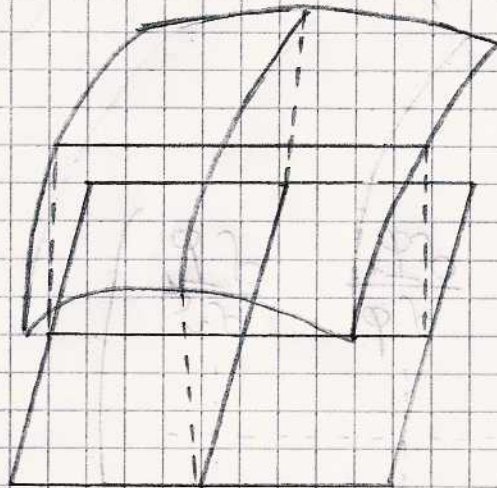
$$f(1+h) - f(1) = 2h + h^2 = \sum_{k=1}^2 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} h^k + o(h^2)$$

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist in $a=1$ zweimal differenzierbar.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist in $a=1$ zweimal differenzierbar.

Wiederholung

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$



partielle
Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \text{Ableitung von } t \mapsto f(a + t e_i)$$

$$\text{Gradient } \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

totales Differential

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ \cup & & \\ a & & \end{array}$$

beste lineare Approximation

$$a+x \mapsto f(a) + Ax$$

$$A = Df = J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

$$f(a+x) = f(a) + Df(a) \cdot x + o(\|x\|)$$

$$\underbrace{D(g \circ f)(a)}_{\substack{k \times n \\ \text{Matrix}}} = \underbrace{(Dg)(f(a))}_{\substack{k \times m \\ \text{Matrix}}} \cdot \underbrace{(Df)(a)}_{\substack{m \times n \\ \text{Matrix}}}$$

Bsp.:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1 + x_2), \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(y_1, y_2) = (y_1^2, y_1 y_2), \quad g \circ f(x_1, x_2) = (x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)$$

$$a = (1, 1)$$

$$Df = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Dg = \begin{pmatrix} 2y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

$$D(g \circ f) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 & 2x_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 + x_2^2 & x_1^2 + 2x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(a) = (1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Taylorpolynom

Multiindices

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

Ordnung bzw.

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

totaler Grad von α

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

höhere partielle Ableitungen

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$, k -mal stetig partiell diffbar

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x)^n} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Taylorformel

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $(k+1)$ -mal stetig diffbar

$a \in U$, x nahe a , $\exists \vartheta \in [0,1]$, so dass

$$f(a+x) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) \frac{x^\alpha}{\alpha!}}_{k\text{-tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a + \vartheta x) \frac{x^\alpha}{\alpha!}}_{\text{Rest}}$$

Beispiel

$$f(x,y) = e^x \cdot \cos y$$

$$a = (0,0)$$

Taylorpolynom 2-ter Ordnung

$$f = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$P(x,y) = f(0)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(0)x$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(0)y$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) \frac{x^2}{2}$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)xy$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) \frac{y^2}{2}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + (-1) \cdot \frac{y^2}{2}$$

24. Definition (lokales Extremum)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U offen.

f hat im Punkt $a \in U$ ein lokales Extremum, wenn ein $r > 0$ existiert mit $B_r(a) \subset U$ und $f|_{B_r(a)}$ hat in a das Maximum bzw. Minimum.

25. Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig diffbar.

- 1.) Notwendig dafür, dass f in a ein lokales Extremum hat, ist, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

- 2.) Ist die notwendige Bedingung erfüllt und $A = \text{Hesse}(f)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ die Hesse-Matrix, dann ist $A > 0$ (positiv definit)

hinreichend dafür, dass A ein lokales Minimum a ist

$A < 0$ (negativ definit) $\Rightarrow$ lokales Maximum a

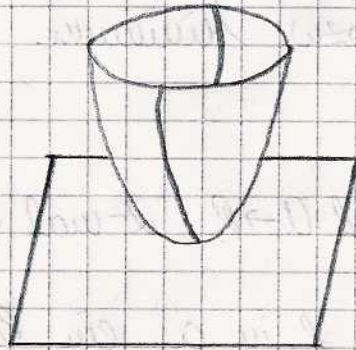
A indefinit $\Rightarrow a$ ist kein lokales Extremum.

26. Beispiele

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$\Rightarrow a = (0, 0)$ ist das einzige mögliche Extremum.

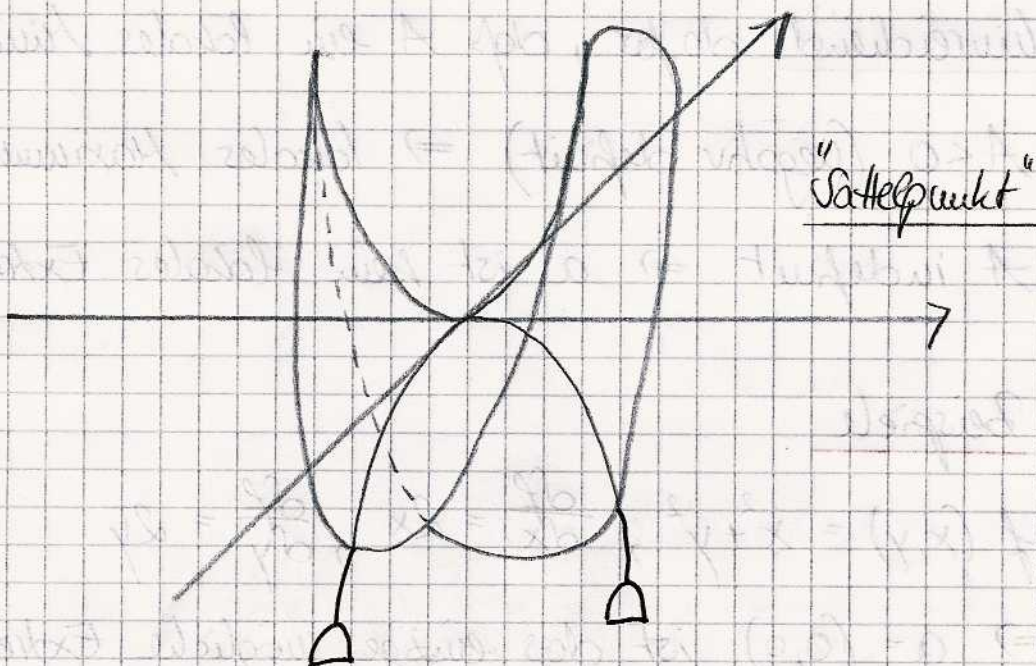
$$\text{Hesse } (f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum} \\ \text{(einziges mögliches Extremum)} \\ \Rightarrow \text{globales Minimum}$$



$$b) f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\text{Hesse } (f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \leadsto \text{kein Extremum}$$



27. Definition (... definit)

Sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische $n \times n$ -Matrix.
 A heißt

positiv definit ($A > 0$) $\Leftrightarrow$ alle EW sind > 0

negativ definit ($A < 0$) $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv definit
bzw. alle EW < 0 .

indefinit $\Leftrightarrow A$ hat strikt positive
und strikt negative EW.

semipositiv definit $\Leftrightarrow$ alle EW sind ≥ 0

seminegativ definit $\Leftrightarrow$ alle EW sind ≤ 0

Bemerkung

Ist $\text{grad } f(a) = 0$ und $A \geq 0$, dann macht Satz 25
keine Aussage.

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$\text{grad } f = (2x, 3y^2)$$

$$\text{Hesse } (f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > 0, \text{ aber kein lokales Minimum}$$

28. Satz

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge.

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K
Maximum und Minimum an.

Beweis:

$$M = \sup \{ f(x) \mid x \in K \} \quad m = \inf \{ f(x) \mid x \in K \}$$

Dann existiert eine Folge $(x_\nu) \subset K$ mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x_\nu) = M$.

Da K beschränkt ist, existiert nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $y_\mu = x_{\nu_\mu} \in K$.

(x_ν) ist beschränkt $\leadsto \exists (x_{\nu_\mu})$, so daß (x_{ν_μ}) konvergiert
 $\leadsto$ weitere Teilfolgen $\leadsto$ alle Komponenten $(x_{\nu_\mu k})$ konv.)

Sei $\bar{x} = \lim y_\mu$. Da K abgeschlossen ist, gilt $\bar{x} \in K$.

Also

$$f(\bar{x}) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} f(y_\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} f(x_{\nu_\mu}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x_\nu) = M.$$

Insbesondere gilt $M < \infty$. ■

Beweis vom Satz:

1) Notwendige Bedingung

Hat f in a ein lokales Extremum, dann hat dies auch $t \mapsto f(a + te_i)$ (Satz in 1-Variablen) $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

2) Hürreichende Bedingung

Es seien $\text{grad } f(a) = 0$, $A = \text{Hesse}(f)(a) > 0$

Taylorformel: für x nahe a $\exists \vartheta \in [0, 1]$, so daß

$$\begin{aligned} f(a+x) &= f(a) + \langle \text{grad } f(a), x \rangle + \frac{1}{2} {}^t x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \vartheta x) \right) x \\ &= f(a) + \frac{1}{2} {}^t x A x + \frac{1}{2} {}^t x B(x) x \end{aligned}$$

wobei $B(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \in M(n \times n, \mathbb{R})$, da die 2-ten partiellen Ableitungen stetig sind.

$$\text{Sei } \eta = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{t_v A v}{\|v\|^2} \right\} = \min_{\|v\|=1} \{ t_v A v \}$$

Da $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|=1\}$ abgeschlossen und beschränkt, wird das Minimum angenommen und genauer $\eta = \text{kleinstes EW von } A, \eta > 0$.

Sei $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$, dann $\exists \delta > 0$, so dass $\|B(x)\|_G \leq \varepsilon$ für x mit $\|x-a\| < \delta$.

Wir zeigen:

$x-a$ ist das einzige Minimum von f auf $B_\delta(a)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(a+x) - f(a) &= \frac{1}{2} (t_x A x + t_x B(x) x) \\ &\geq \frac{1}{2} (\eta \cdot \|x\|^2 - \varepsilon \|x\|^2) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (\eta - \varepsilon)}_{>0} \underbrace{\|x\|^2}_{\geq 0} \quad (=0 \Leftrightarrow x=0) \end{aligned}$$

Anderer Fall analog.

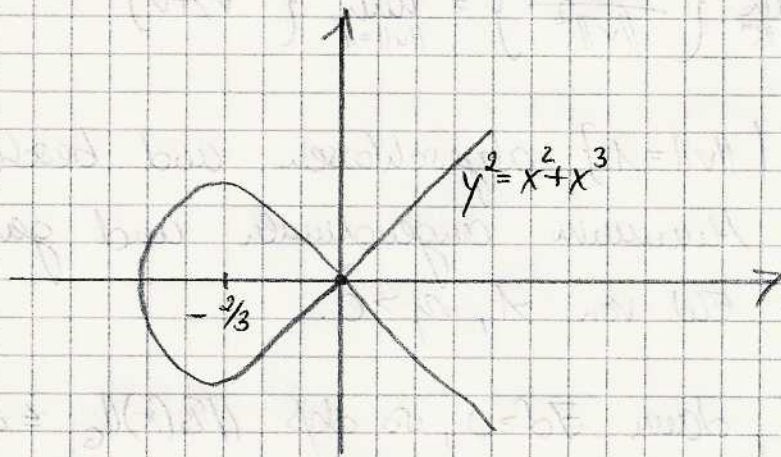
Bei indefinit schranken wir f auf Raum Geraden zu positiven und negativen EW ein.

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3$$

$$\text{Mögliche Extrema: } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2 = 0 \rightarrow x=0 \vee x = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \rightarrow y=0$$



$$\text{Hesse}(f) = \begin{pmatrix} 2+6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hesse}(f)\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lok. Max.}$$

$$\text{Hesse}(f)(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$