

§ 33 Hyperflächen

① Definition (Hyperfläche)

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft diffbare Funktion (z.B. Polynom).

Die Nullstellenmenge

$$N(f) = N_0(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

heissen wir eine Hyperfläche.

Für $n=3$ ist $N(f)$ (in der Regel) eine Fläche.

z.B. $N(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ ist die Kugel.

Daher der Name.

Ist f eine lineare Funktion, dann ist $N(f)$ eine Hyperebene.

② Definition (Quadrik)

Ist $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein quadratisches Polynom (alle Terme Grad ≤ 2), dann heißt

$$Q = N(q) \quad \underline{\text{Quadrik.}}$$

Für das Studium der Quadriken wollen wir unser Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ der Quadrik anpassen.

③ Definition (Translation, Bewegung, affine Transformation)

Die Abbildung $T_b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T_b(x) = x + b$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ Vektor, heißt Translation um b .

Eine Bewegung von $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Gestalt

$$B(x) = S \cdot x + b$$

wobei $S \in SO(n)$, also die Komposition von einer Drehung mit einer Translation.

Bewegungen erhalten Abstände von Punkten und Winkel zwischen sich schneidenden Geraden.

Eine affine Transformation ist eine Abbildung

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } L(x) = Ax + b,$$

wobei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ beliebig ist.

Affine Transformationen lassen Abstände und Winkel nicht invariant.

Aber Kollinearität bleibt erhalten:

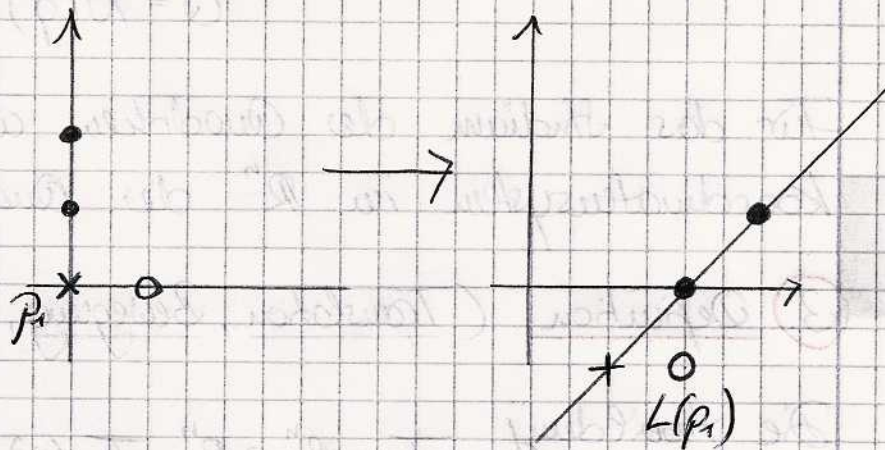
3 Punkte heißen kollinear, wenn sie auf einer Geraden liegen.

Unter einer affinen Transformation bleiben kollineare Punkte kollinear.

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Sei $Q = N(q)$ eine Quadrik. Wir wollen eine Bewegung $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ finden, so dass die Gleichung $q(B(x)) = 0$

möglichst einfache Gestalt hat.

Zunächst einmal gilt

$$q(x) = {}^t x A x + {}^t b \cdot x + c$$

A symmetrische Matrix
 b Vektor
 c Skalar

Drei Schritte

1. Schritt (Hauptachsentransformation)

Wir betrachten den rein quadratischen Anteil ${}^t x A x$

Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation S , so dass ${}^t S A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Setzen wir Sx für x ein, so erhalten wir

$$q(Sx) = {}^t x {}^t S A S x + ({}^t b S) x + c$$

$$q(Sx) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n + c$$

2. Schritt (Quadratische Ergänzung)

1. Fall Alle EW λ_i sind $\neq 0$.

$$q(Sx) = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{\mu_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \dots + \lambda_n \left(x_n + \frac{\mu_n}{2\lambda_n}\right)^2 + \left[c - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^2}{4\lambda_i}\right]$$

$$\underbrace{q\left(S\left(x - \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{2\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\mu_n}{2\lambda_n} \end{pmatrix}\right)\right)}_{B(x)} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + d$$

2. Fall $\text{rang } A = r < n$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$.

$$q(B(x)) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + \mu_{r+1} x_{r+1} + \dots + \mu_n x_n + d$$

Wir machen eine weitere Koordinatentransformation auf dem Raum $\{x_1 = \dots = x_r = 0\} = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle$

neue orthogonale Basis $\langle f_{r+1}, \dots, f_n \rangle$, so daß $f_{r+2}, \dots, f_n$ auf $\mu_{r+1} x_{r+1} + \dots + \mu_n x_n$ verschwinden.

$$q(\tilde{B}(x)) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + \mu x_{r+1} + d$$

$$\text{mit } \mu = \mu_{r+1} (f_{r+1}, r_{r+1}) + \dots + \mu_n (f_{r+1}, n)$$

wobei

$$f_{r+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{r+1, r+1} \\ \vdots \\ f_{r+1, n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\| \mu \|} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_{r+1} \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \mu = \| \mu \|$$

3. Schritt (Vorzeichen der Koeffizienten und Skalierung der Gleichung)

Ein Koeffizient wird 1, die anderen in positiv und negativ sortiert.

1. Fall

a) $d \neq 0$

$$\frac{\lambda_1}{-d} x_1^2 + \dots + \frac{\lambda_n}{-d} x_n^2 = 1$$

Es seien $\frac{\lambda_1}{-d}, \dots, \frac{\lambda_k}{-d} > 0$, die anderen < 0 .

Dann existieren $a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n$, so daß

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{b_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{b_n^2} = 1$$

b) $d=0$

$$\leadsto \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{b_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{b_n^2} = 0$$

2. Fall

a) $\mu \neq 0$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \dots - \frac{x_r^2}{b_r^2} = x_{r+1}$$

b) $\mu = 0$

α) $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \dots - \frac{x_r^2}{b_r^2} = 1$

β) " = 0

5. Beispiele

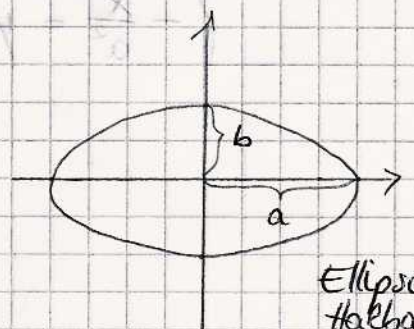
$n=2$

Fälle

1a)

• $k=2$

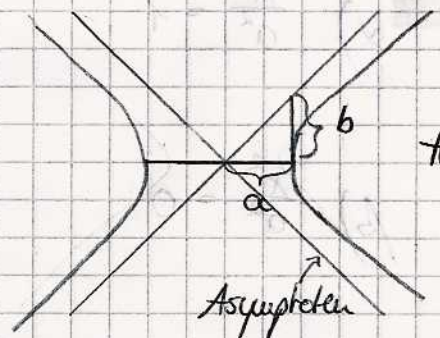
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ellipsoid u.
Halbachsen
 a, b
 $a=b=r$ (Kreis)

• $k=1$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Hyperbel

$$\bullet k=0 \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\emptyset$

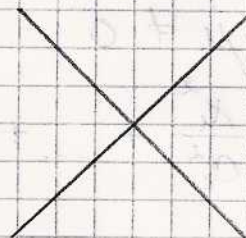
1b)

$$\bullet k=2 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$\bullet$ isolierter Punkt

$$\bullet k=1 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$= \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$



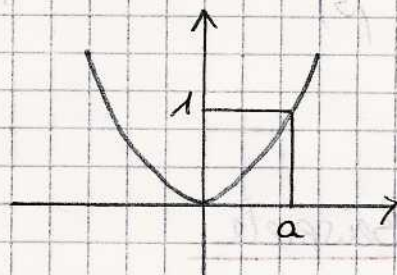
Geradenpaar
mit Steigung
 $\pm \frac{b}{a}$

$$\bullet k=0 \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$\bullet$ isolierter Punkt

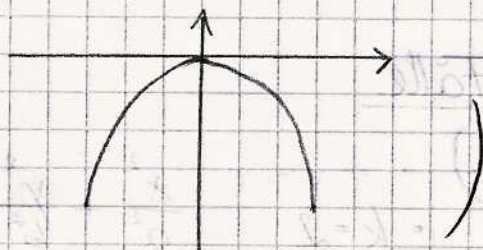
2) $rg = 1$

$$\bullet \mu \neq 0 \quad \frac{x^2}{a^2} = y$$



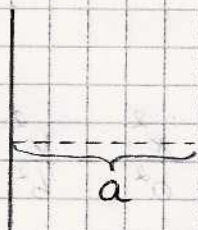
Parabel

$$\left(-\frac{x^2}{a^2} = y\right)$$



$$\bullet \mu = 0$$

$$\alpha) \frac{x^2}{a^2} = 1$$



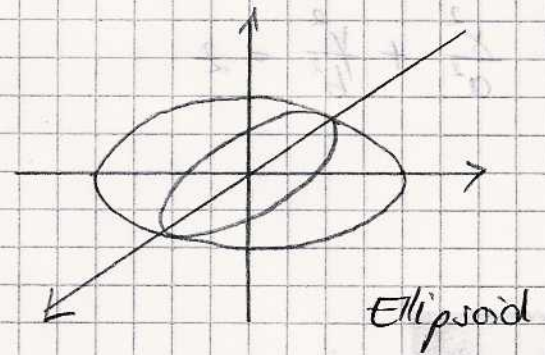
parallele
Geraden
mit Abstand a

$$\beta) \frac{x^2}{a^2} = 0$$

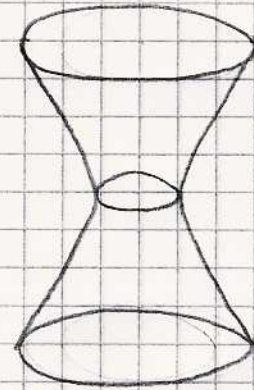


$$n=3$$

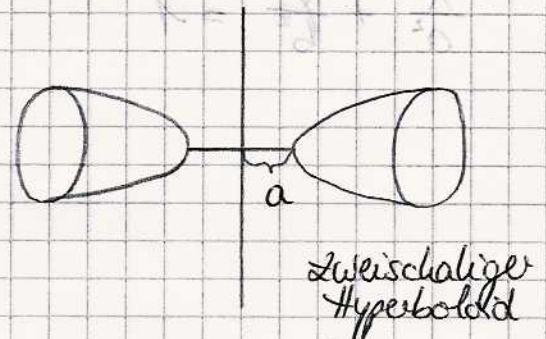
$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



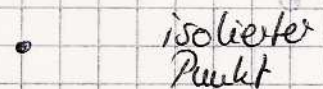
$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



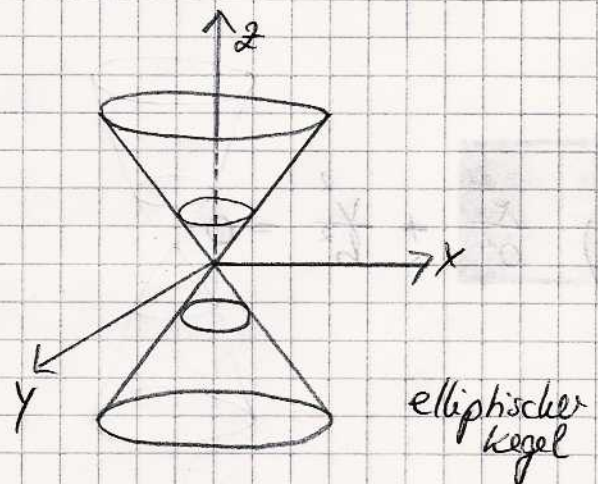
$$3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



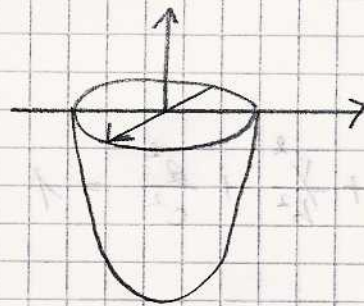
$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



$$5) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

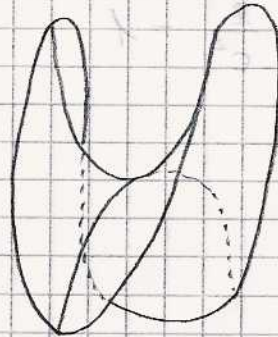


$$6) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$$



elliptisches
Paraboloid

$$7) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2$$



hyperbolisches
Paraboloid

$$8) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



ell. Zylinder

$$9) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

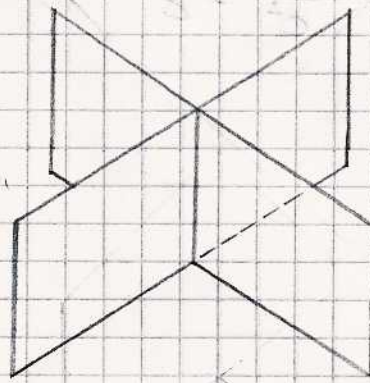


hyp. Zylinder

$$10) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

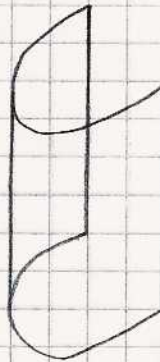


$$11) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$



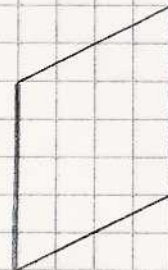
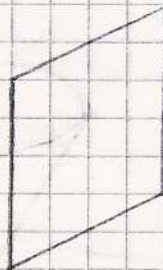
Ebenen-
paar

$$12) \frac{x^2}{a^2} = y$$



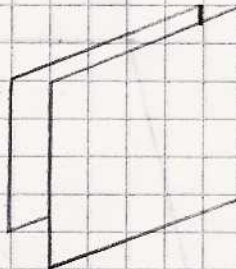
Zylinder
über
Parabel

$$13) \frac{x^2}{a^2} = 1$$



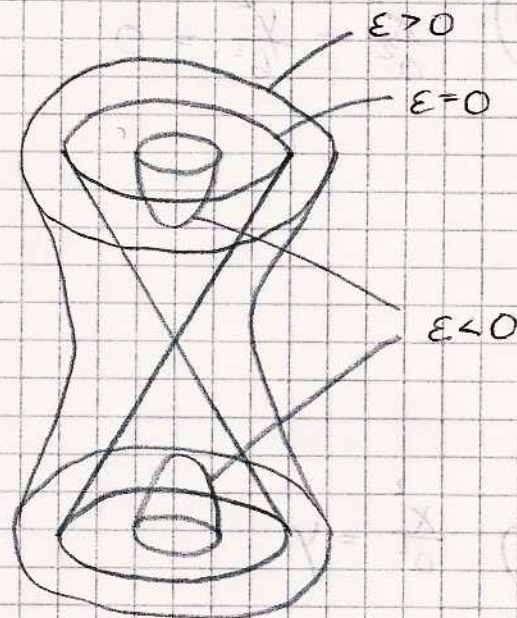
parallele
Ebenen

$$14) \frac{x^2}{a^2} = 0$$



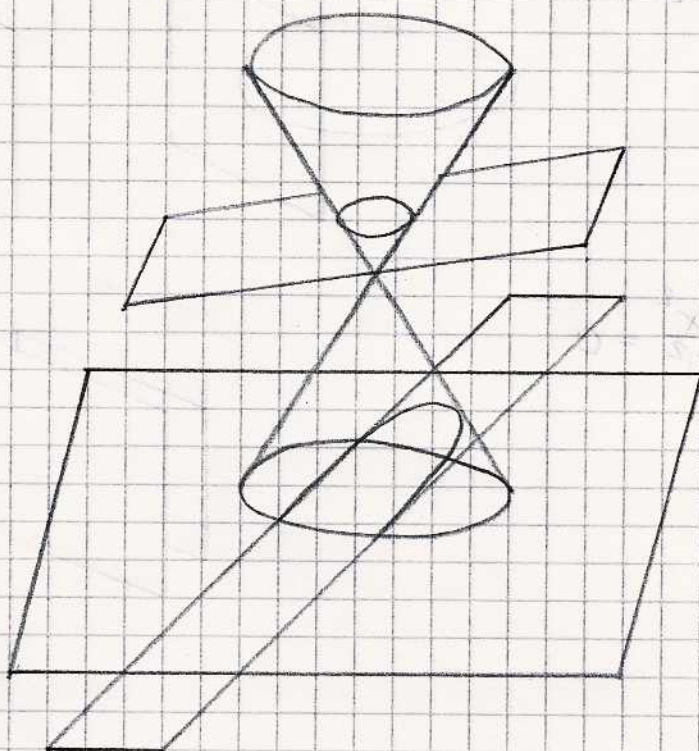
parallele
Ebenen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon$$



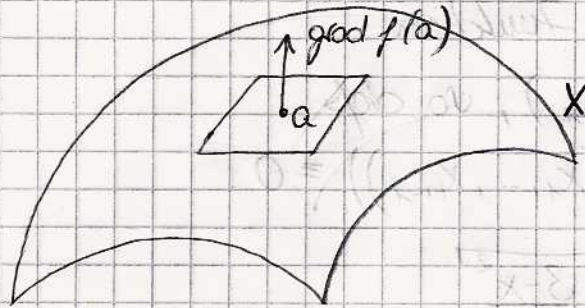
6. Kegelschnitte

Standardkegel in $\mathbb{R}^3$



Sei $X = N(f) \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche.

Wir wollen X nahe $a \in X$ beschreiben.



⑦ Definition (Tangentialraum)

$$\text{Sei } f(x) = \underbrace{f(a)}_{=0} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) (x_j - a_j) + o(\|x - a\|)$$

Dann heißt

$$T_a X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) (x_j - a_j) = 0\}$$

der Tangentialraum von X im Punkt a .

$T_a X$ ist der in dem Punkt a verschobene Vektorraum

$$\{ \langle \text{grad } f(a), x \rangle = 0 \}$$

Ist $\text{grad } f(a) \neq 0$, dann ist $T_a X$ eine Hyperebene

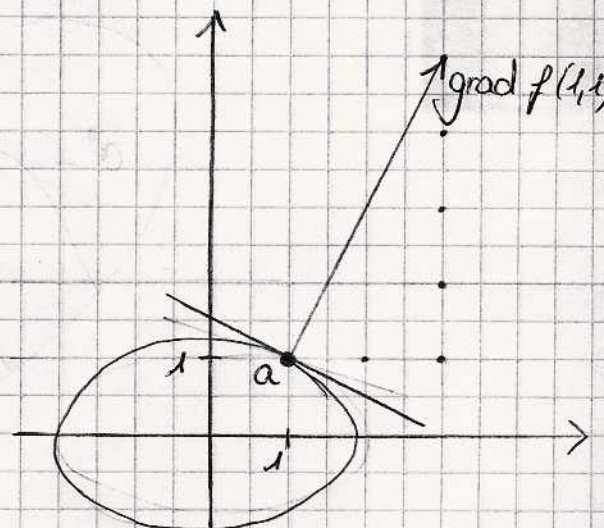
⑧ Beispiel:

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 = 3\}$$

$$a = (1, 1) \in E; f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3$$

$$\text{grad } f = (2x, 4y)$$

$$\text{grad } f(1, 1) = (2, 4)$$



Können wir X nahe a noch besser darstellen?

Antwort: Ja!

Wenn wir die Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ nach einer Variable auflösen können, etwa nach x_n :

Wir suchen eine Funktion

$x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$, so daß

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) \equiv 0$$

Im Beispiel: $y = \sqrt{\frac{3-x^2}{2}}$

9. Satz (über implizite Funktionen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig diffbar und
 $a = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \in N(f)$.

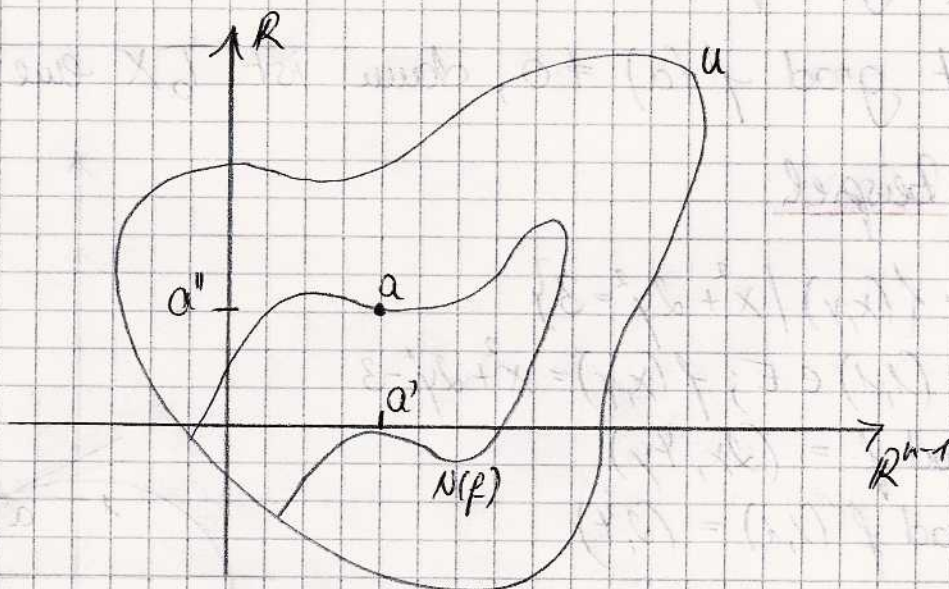
Gilt

$\frac{df}{dx_n}(a) \neq 0$, dann existieren Umgebungen

$V' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von $a' = (a_1, \dots, a_{n-1})$

und $V'' \subset \mathbb{R}$ von $a'' = a_n$

mit $V' \times V'' \subset U$



$\exists g: V' \rightarrow V''$ mit $g(a') = a''$, so dass

1) $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0 \quad \forall x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V'$
und 2) $\forall (x', x'') \in V' \times V'' \cap N(f)$ gilt: $x'' = g(x')$

g ist k -mal diffbar.

Beweis: später

10. Bemerkung

Das Taylorpolynom von g im Punkt a' der Ordnung k lässt sich durch wiederholtes Ableiten von $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ bestimmen.

Für $k \leq n-1$:

$$\frac{df}{dx_k}(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$$

||

$$\frac{df}{dx_k}(x', g(x')) + \frac{df}{dx_n}(x', g(x')) \cdot \frac{dg}{dx_k}(x') = 0 \quad (*)$$

a' einsetzen gibt:

$$0 = \frac{df}{dx_k}(a) + \underbrace{\frac{df}{dx_n}(a)}_{\neq 0 \text{ nach Voraussetzung}} \cdot \frac{dg}{dx_k}(a')$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dx_k}(a') = - \frac{df}{dx_k}(a) / \frac{df}{dx_n}(a)$$

(*) wiederholt abgeleitet gibt eine Gleichung für $\frac{d^\alpha g}{(dx)^\alpha}(a)$ für $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $|\alpha| \leq k$.

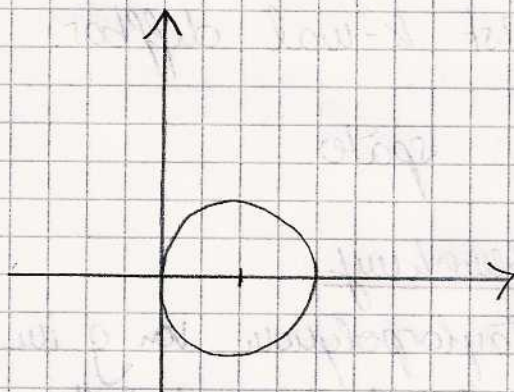
11. Extrema mit Nebenbedingung

Sei $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ Fkt. Wir wollen ein Extremum von h unter der Nebenbedingung $f(x) = 0$ finden.

Bsp.:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 = E$$

Suche Pkt. auf E mit
größtem Abstand zum Nullpkt.



Wir wollen $h(x, y) = x^2 + y^2$ auf E maximieren.

Satz

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $a \in N(f)$ ein Punkt mit $\text{grad } f(a) \neq 0$.

Sei $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Fkt.

Notwendig dafür, dass $h|_{N(f)}$ in a ein lokales Extremum hat, ist die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\text{grad } h(a) = \lambda \cdot \text{grad } f(a)$$

λ heißt Lagrange'scher Multiplikator.

Bsp.:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$h(x, y) = x + y$$

Suche Punkt, wo Fkt. am größten wird.
(Maximum)

$$\text{grad } h = (1, 1)$$

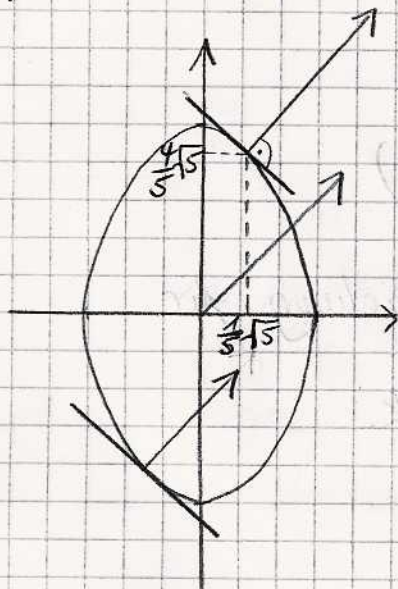
$$= \lambda \cdot \text{grad } f = \lambda \left(2x, \frac{y}{2} \right)$$

$$\text{gibt } \left. \begin{array}{l} 1 = \lambda 2x \\ 1 = \lambda \frac{y}{2} \end{array} \right\}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

3 Gleichungen

3 Unbekannten
 (x, y, λ)



$$\lambda = \frac{1}{2x} \Rightarrow 1 = \frac{y}{4x}, y = 4x$$

$$x^2 + \frac{(4x)^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, y = \pm 4 \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\lambda \operatorname{grad} f = \lambda (2(x-1), 2y) = (2x, 2y)$$

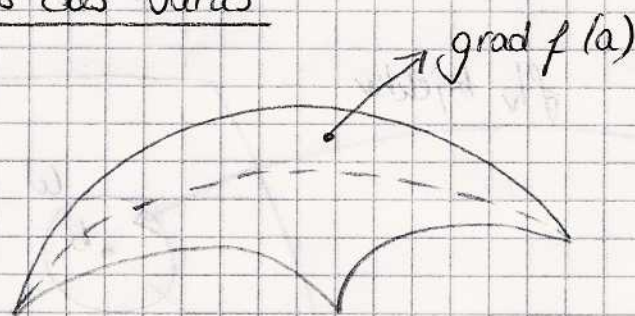
$$\Rightarrow \lambda (2(x-1)) = 2x \Rightarrow \lambda = \frac{x}{x-1}$$

$$\lambda 2y = 2y \Rightarrow \lambda = 1 \quad y=0$$

Wenn
 $y \neq 0$

Lösung
 $(x, y) = (2, 0)$

Beweis des Satzes



Da $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$ können wir nach einer Variablen auflösen, etwa nach x_n , und müssen zeigen, dass die Bedingung aus der notwendigen Bedingung für Extrema von $h(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))$ folgt.

$$\frac{d}{dx_n} (h(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))) (a') = 0$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_n} (a', g(a')) + \frac{\partial h}{\partial x_n} (a', g(a')) \cdot \frac{dg}{dx_n} (a')$$

Nun gilt

$$\frac{dg}{dx_n} (a') = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n} (a)}{\frac{\partial f}{\partial x_n} (a)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_n} (a) = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_n} (a)}_{=:\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} (a)$$

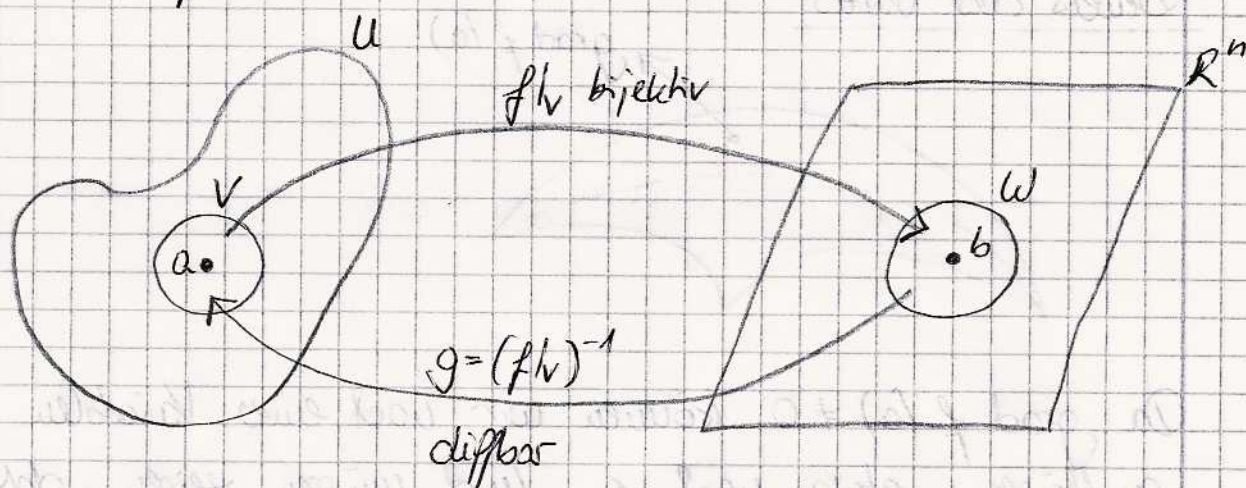
$$\Rightarrow \text{grad } h(a) = \lambda \cdot \text{grad } f(a)$$

Bemerkung

Mit Hilfe der Rekursionsformeln für die partiellen Ableitungen von g nach $\frac{\partial}{\partial x^i}$ in a läßt sich auch eine hinreichende Bedingung angeben.

Umkehrsatz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine diffbare Abbildung, $a \in U$, $b = f(a)$.



Notwendig ist

$$Dg(b) \cdot Df(a) = E_n, \text{ da } D(\text{id}_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) = E$$

13. Satz (über die Umkehrabbildung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mal stetig diffbare Abbildung, $a \in U$, $b = f(a)$.

Ist die Matrix $Df(a)$ invertierbar, dann existieren Umgebungen V mit $a \in V \subset U$, W mit $b \in W \subset \mathbb{R}^n$, so daß

- 1) $f|_V: V \rightarrow W$ bijektiv ist
- 2) $g := (f|_V)^{-1}: W \rightarrow V$ k -mal diffbar ist
und $Dg(b) = (Df(a))^{-1}$

$$(Df(a)) = \left(\frac{df_i}{dx_j}(a) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

14 Beispiel:

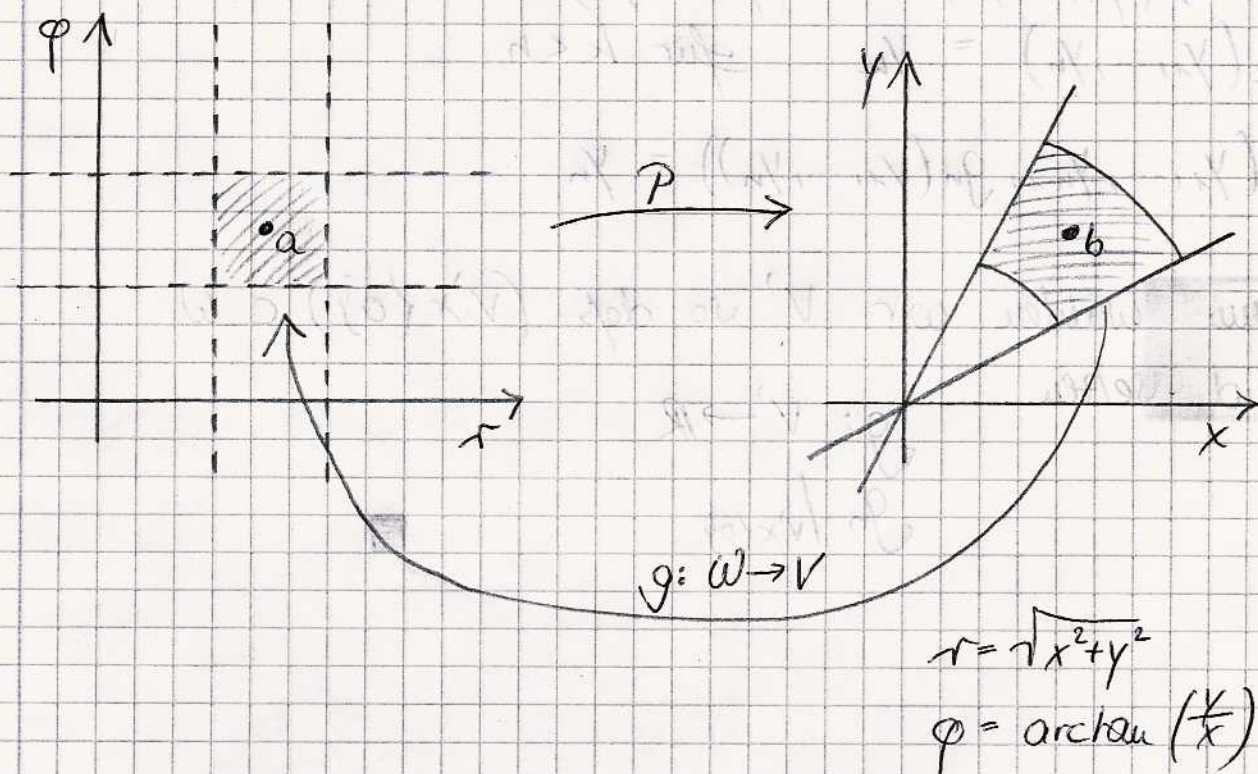
Polarkoordinaten

$$P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$$DP = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det DP = r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

$\Rightarrow$ lokal umkehrbar, falls $r \neq 0$.



Beweis von: Umkehrsatz $\Rightarrow$ Satz über implizite Funktionen

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, \frac{df}{dx_n}(a) \neq 0$$

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^n, F(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x))$$

$$DF(a) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \\ \hline \frac{df}{dx_1}(a) & \frac{df}{dx_{n-1}}(a) & \frac{df}{dx_n}(a) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \det DF(a) = \frac{df}{dx_n}(a) \neq 0$$

$\Rightarrow F$ ist lokal umkehrbar

$G: W \rightarrow V$ lokale Umkehrung

$$G(y_1, \dots, y_n) = (g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n))$$

$$(F \circ G)(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n)$$

$$g_k(y_1, \dots, y_n) = y_k \quad \text{für } k < n$$

$$f(y_1, \dots, y_{n-1}, g_n(y_1, \dots, y_n)) = y_n$$

Dann wählen wir V' so dass $(V' \times \{0\}) \subset W$
und setzen

$$g: V' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_n|_{V' \times \{0\}}$$

Umkehrsatz:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diffbar, $\det(D_f(a)) \neq 0$
 $\Rightarrow f$ ist lokal umkehrbar

15. Satz:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mal diffbar,
 $a \in U$, $b = f(a)$.

Ist $\det(D_f(a)) \neq 0$

$\exists$ Umgebung $a \in V \subset U$, $b \in W \subset \mathbb{R}^n$, so dss
 $f|_V: V \rightarrow W$ bijektiv ist und $g = (f|_V)^{-1}: W \rightarrow V$
 ebenfalls k -mal stetig diffbar mit Jacobi-Matrix
 $(Dg)(b) = (Df(a))^{-1}$

Zum Beweis verwenden wir einen Fixpunktsatz:

16. Definition: (Fixpunkt)

$\varphi: M \rightarrow M$ sei Abbildung.

Dann heißt $\xi \in M$ Fixpunkt von φ , wenn $\xi = \varphi(\xi)$.

Beispiel:

Existenzsatz für Fixpunkte

Satz (Brouwer):

$B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ φ stetig $\Rightarrow \varphi$ hat einen Fixpunkt

17. Definition (kontrahierend)

Sei B_r eine abgeschlossene Kugel. Eine Abbildung $\varphi: B_r \rightarrow B_r$
 heißt kontrahierend, wenn es ein λ mit $0 \leq \lambda < 1$ gibt, so
 dss $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \quad \forall x, y \in B_r$.
 Kontrahierende Abbildungen sind stetig.

18. Satz (Fixpunktsatz)

Sei $\varphi: \overline{B}_r \rightarrow \overline{B}_r$ eine kontrahierende Abbildung.

Dann hat φ genau einen Fixpunkt ξ .

Genauer gilt: Für $x_0 \in \overline{B}_r$ beliebig und $x_k = \varphi(x_{k-1})$,

$k \geq 1$ rek. def. gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$$

Beweis:

Wegen der Kontraktionseigenschaft gilt für $m > n$:

$$\|x_m - x_n\| \leq \lambda \|x_{m-1} - x_{n-1}\| \leq \lambda^n \cdot \|x_{m-n} - x_0\| \leq \lambda^n \cdot 2r$$

$\Rightarrow (x_n)$ ist eine Cauchy-Folge.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad & \varphi \text{ ist stetig, } \varphi(\xi) = \varphi(\lim x_n) \\ & = \lim \varphi(x_n) \\ & = \lim x_{n+1} \\ & = \xi \end{aligned}$$

$\Rightarrow \xi$ ist ein Fixpunkt. Es ist der einzige, da für $\eta \in \overline{B}_r$ gilt:

$$\|\varphi(\eta) - \xi\| \leq \lambda \|\eta - \xi\| < \|\eta - \xi\|$$

$\uparrow$
falls $\eta \neq \xi$

$\Rightarrow \eta$ kann kein Fixpunkt sein. ■

Beweis des Umkehrsatzes

a) Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie im Satz.

Dann dürfen wir $a=0$ und $b=f(a)=0$ annehmen.

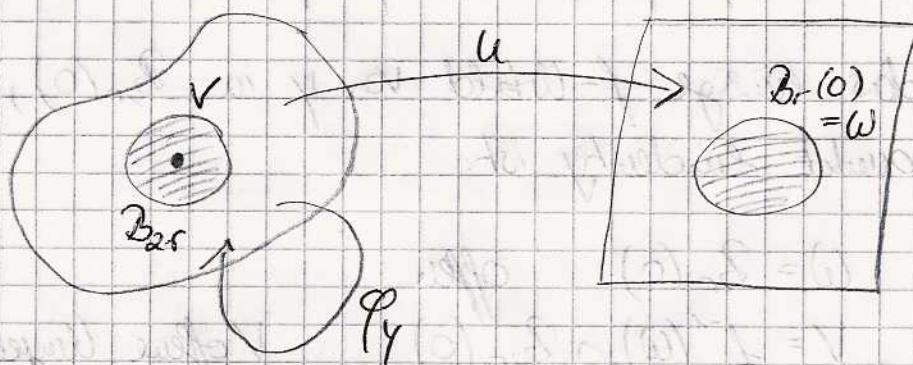
Sonst betrachten wir $x \mapsto f(x+a) - f(a)$

Ferner sei $L = (Df(0))^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Lx$

Dann gilt für $L \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, D(L \circ f)(0) = E_n$
(Einheitsmatrix).

Es genügt also, den Fall $a=b=0, Df(0)=E_n$ zu betrachten.

b) Wir wollen die Gleichung $y=f(x)$ für kleine y lösen
mit Hilfe der Fixpunktabbildung $\varphi_y(x) = y + x - f(x)$.
Ist nämlich $\bar{z}$ Fixpunkt von φ_y ,
 $\bar{z} = \varphi_y(\bar{z}) = y + \bar{z} - f(\bar{z})$, dann gilt $y = f(\bar{z})$.
Die Fixpunkte von φ_y sind also die f -Werte von y .



Wir legen zunächst den Definitionsbereich für φ_y fest.

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, daß $\|D\varphi_y(x)\| = \|E_n - Df(x)\| \leq \frac{1}{2}$
für alle $x \in \bar{B}_{2\varepsilon}(0)$

Dabei ist $\|\cdot\|$ eine zur euklidischen verträgliche Matrixnorm.
Dies existiert, da f stetig diffbar ist mit $Df(0) = E_n$.

Nach der Taylorformel gilt für $\vartheta \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \| \varphi_Y(x_2) - \varphi_Y(x_1) \| &= \| (E_n - Df(x_2 + \vartheta(x_1 - x_2))) \| \|x_2 - x_1\| \\ &\leq \| E_n - Df(x_2 + \vartheta(x_1 - x_2)) \| \|x_2 - x_1\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B_{2r}(0)} \end{aligned}$$

Ferner für y mit $\|y\| < r$ gilt:

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \| \varphi_Y(x) \| &= \| \varphi_Y(x) - \varphi_Y(0) + y \| \\ &\leq \| \varphi_Y(x) - \varphi_Y(0) \| + \|y\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x\| + \|y\| < r + r = 2r \quad \forall x \in B \end{aligned}$$

$$\text{Also } \varphi_Y: \overline{B_{2r}(0)} \rightarrow \overline{B_{2r}(0)} \subset \overline{B_{2r}(0)}$$

Wir können also den Fixpunktsatz anwenden.

Sei $x \in \overline{B_{2r}(0)}$ der Fixpunkt von φ_Y .

Dann gilt $x \in B_{2r}(0)$ (liegt im Inneren)

$$x = \varphi_Y(x) = x + y - f(x) \Rightarrow y = f(x)$$

x ist also das einzige f -Bild von y in $B_{2r}(0)$, da der Fixpunkt eindeutig ist.

Wir setzen

$$W = B_r(0) \quad \text{offen}$$

$$V = f^{-1}(W) \cap B_{2r}(0)$$

V offene Umgebung von 0, da f stetig ist.

$g: W \rightarrow V$, $g(y) :=$ eindeutiger Fixpunkt von φ_Y auf $\overline{B_{2r}(0)}$

g ist bijektiv: $f \circ g(y) = y$, $g(f(x)) = x$

$$g = (f|_V)^{-1}$$

c) Wir zeigen: g ist stetig.

$$y_1, y_2 \in W, x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2)$$

$$x_2 - x_1 = \varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1) + f(x_2) - f(x_1)$$

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &\leq \|\varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1)\| + \|f(x_2) - f(x_1)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| + \|f(x_2) - f(x_1)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x_2 - x_1\| &\leq 2 \|f(x_2) - f(x_1)\| = 2 \|y_2 - y_1\| \\ &\quad \|g(y_2) - g(y_1)\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|g(y_2) - g(y_1)\| \leq 2 \cdot \|y_2 - y_1\| \Rightarrow g \text{ ist stetig.}$$

d) Bleibt die Differenzierbarkeit zu zeigen.

Zunächst einmal gilt: $\mathcal{D}_f(x)$ invertierbar $\forall x \in V$,
denn für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\| [E_n - \mathcal{D}_f(x)] \cdot v \| \leq \| E_n - \mathcal{D}_f(x) \| \cdot \|v\| \leq \frac{1}{2} \|v\|$$

Andererseits ist $\mathcal{D}_f(x) \cdot v = 0$, so haben wir

$$\|v\| = \underbrace{\| [E_n - \mathcal{D}_f(x)] v \|}_0 \leq \frac{1}{2} \|v\| \Rightarrow v = 0$$

$\Rightarrow \mathcal{D}_f(x)$ hat Kern $\{0\}$

$\Rightarrow$ invertierbar

Differenzierbarkeit von f in x_0 bedeutet

$$f(x) - f(x_0) = \mathcal{D}_f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\mathcal{D}_f(x_0))^{-1} (f(x) - f(x_0)) &= x - x_0 + \underbrace{(\mathcal{D}_f(x_0))^{-1} o(\|x - x_0\|)}_{o(\|x - x_0\|) = o(\|y - y_0\|)} \end{aligned}$$

$$g(y) - g(y_0) = (D_g(x_0))^{-1}(y - y_0) + \underbrace{o(\|y - y_0\|)}_{o(\|y - y_0\|)}$$

$\Rightarrow g$ ist differenzierbar

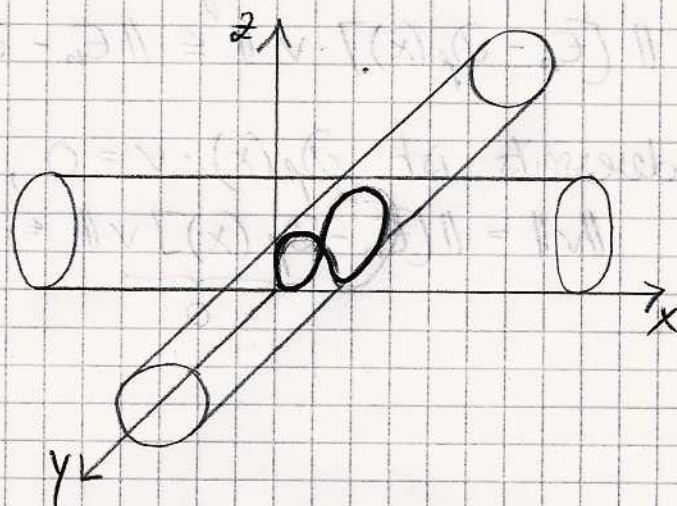
$$Dg(y_0) = (D_f(g(y_0)))^{-1}$$

Höhere Ableitungen folgen mit der Kettenregel induktiv.

(19) Satz (über implizite Funktionen, allgemein)

$U \subset \mathbb{R}^n$, $m \leq n$ und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine k -mal stetig diffbare Abbildung und $a \in U$ Punkt mit $f(a) = 0$.

Beispiel: Durchschnit von zwei Zylindern
 $x^2 + z^2 = 1$
 $y^2 + (z-1)^2 = 1$ $a = (0, 1, 1)$



Angenommen der letzte Minor der Jacobi-Matrix erfüllt

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (a) \neq 0$$

Dann existiert für $a = (a', a'') \in \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$
 eine Umgebung $a \in V' \times V'' \subset U$ und eine
 k -mal stetig diffbare Abbildung $g: V' \rightarrow V''$, so dß

1) $f(x', g(x')) = 0$

2) $\forall (x', x'') \in V' \times V''$ mit $f(x', x'') = 0$ gilt $x'' = g(x')$

Bsp.:

$$f = \begin{pmatrix} x^2 + z^2 - 1 \\ y^2 + z^2 - 2z \end{pmatrix}$$

$$D_f = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ 0 & 2y & 2z-2 \end{pmatrix} \Rightarrow D_f(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ Funktionen $y(x), z(x)$

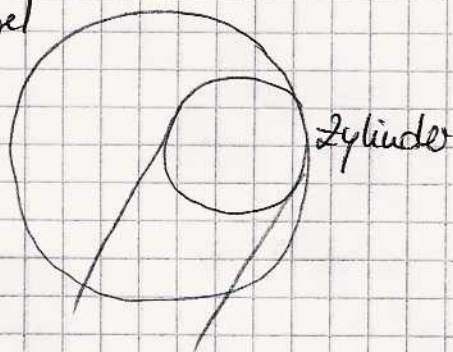
$$z = \sqrt{1-x^2}$$

$$y = \sqrt{1-(z-1)^2} = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{1-x^2}}$$

Bsp.:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Kugel



$$a = (1, 0, 0)$$

$$f = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x^2 - x + y^2 \end{pmatrix}$$

$$D_f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

From exact for $\alpha = (0,0) = 0$ we have
 and $\alpha = (0,0) = 0$ we have
 1- we have $\alpha = (0,0) = 0$ we have

$$\alpha = (0,0) = 0 \quad \alpha = (0,0) = 0 \quad \alpha = (0,0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,1) \quad \alpha = (0,0) = 0$$

$$\alpha = (0,0) = 0 \quad \alpha = (0,0) = 0$$

$$\alpha = (0,0) = 0 \quad \alpha = (0,0) = 0$$

$$\alpha = (0,0) = 0 \quad \alpha = (0,0) = 0$$

$$\alpha = (0,0) = 0$$

$$\alpha = (0,0) = 0$$

$$\alpha = (0,0) = 0$$

$$\alpha = (0,0) = 0$$

§ 34 Ein Blick auf Differentialgleichungen

1. Definition (DGL erster Ordnung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$x' = f(t, x)$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine diffbare Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$1) (t, \varphi(t)) \in U$$

$$2) \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

Oft suchen wir Lösungen, die einer Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = x_0$ genügen.

2. Beispiele

$$1) x' = c \cdot x$$

$U = \mathbb{R}^2$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, x) = c \cdot x$
 f hängt nicht von t ab.

Lösung: $\varphi(t) = A \cdot e^{c \cdot t}$
 $\varphi'(t) = c \cdot A \cdot e^{c \cdot t} = c \cdot \varphi(t) = f(t, \varphi(t))$

Anwendung:

• Wachstum = proportional zum Bestand

$x' = c \cdot x$, $c > 0$ exponentielles Wachstum

$$\varphi(t) = c_0 \cdot e^{c(t-t_0)}$$

• radioaktiver Zerfall

Strahlung = proportional zur radioaktiven Masse

$$x' = -c \cdot x$$

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-ct}$$

$t_0 = \text{Halbwertszeit}$

$$x(t_0) = \frac{1}{2}x(0) \Leftrightarrow A_0 e^{-ct_0} = \frac{1}{2}A_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-ct_0}, \quad ct_0 = \ln 2$$

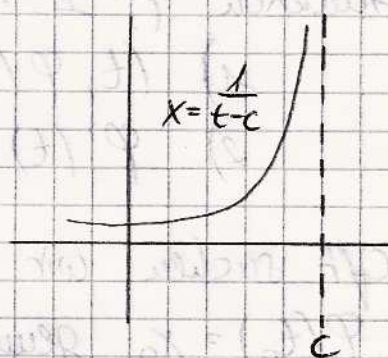
$$t_0 = \frac{\ln 2}{c}, \quad c = \frac{\ln 2}{t_0}$$

2) Explosionsgleichung
 $x' = x^2$

Lösung: $x' = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt - c \Rightarrow \frac{1}{x} = t - c$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{t - c}$$

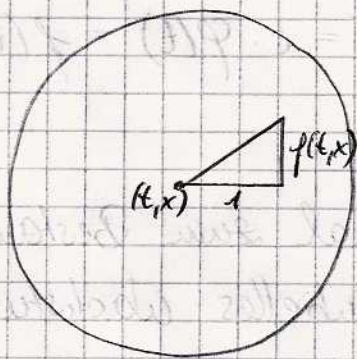


Die Lösungen existieren nur auf endlichen Zeitintervallen $[t_0, c[$

③ Definition (Richtungsfeld)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$

$x' = f(t, x)$, dann heißt das Feld

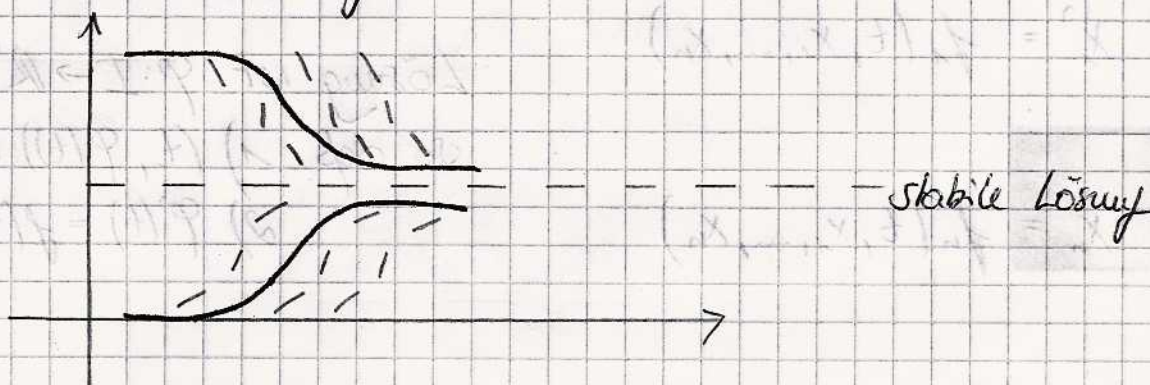


Richtungsfeld von $x' = f(t, x)$
 $(t, x) \mapsto (1, f(t, x))$
 $U \rightarrow \mathbb{R}^2$

Lösungen sind tangential zum Richtungsfeld.

④. Beispiel

Logistische Gleichung $x' = x(1-x)$



$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt + c$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln x - \ln(x-1) = t + c$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-1} = C \cdot e^t \quad \text{mit } C = e^c$$

$$x = \frac{C e^t}{C e^t - 1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$$

$$x(t) \equiv 1 \quad \text{Gleichgewichtslösung}$$

⑤. Definition (DGL höherer Ordnung)

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

heißt gewöhnliche DGL n-ter Ordnung, Lösung ist eine n -mal diffbare Fkt. $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$1) (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in U$$

$$2) \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

Ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung ist gegeben durch $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$\vdots$

$$x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

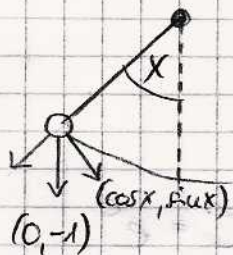
Lösung ist $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$,

so daß 1) $(t, \varphi(t)) \in U$

2) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

6. Beispiel

1) Mathematisches Pendel



$$x'' = -\sin x$$

2) Harmonischer Oszillator

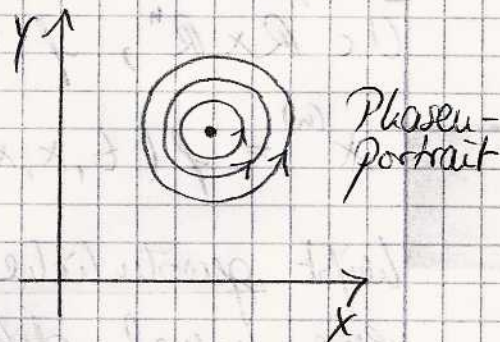
$$x'' = -x \quad \text{Lsg: } x(t) = a \cos t + b \sin t$$

3) Räuber - Beute - Modell (Volterra)

x = Karpfen, y = Hechte

$$x' = k \cdot x - a x y$$

$$y' = -l y + b x y$$



Gleichgewichtspunkt: $0 = k x_0 - a x_0 y_0$

$$0 = -l y_0 + b x_0 y_0$$

$$y_0 = k/a, \quad x_0 = l/b \quad \text{ist konstante Lösung}$$

4) Jede DGL n-ter Ordnung

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (*)$$

läßt sich in ein System übersetzen:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

usw.

(**)

$$x_{n-1}' = x_n$$

$$x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

φ Lösung von (*) $\Rightarrow (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ Lösung von (**)

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ Lösung von (**) $\Rightarrow \varphi_1$ Lösung von (*)

7. Definition (autonom, Phasenportrait)

Ein DGL-System $x' = f(x)$, wobei f nicht von t abhängt, heißt autonom. (ohne Einflüsse von außen).

Die Menge der Kurven $x = \varphi(t)$ in $\mathbb{R}^n$ nennt man dann Phasenportrait des DGL.

8. Beispiel

DGL vom Typ $x'' = f(x)$ autonom.

Phasenportrait ist in (x, y) -Ebene mit $y = x'$.

Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} (x')^2 = \frac{1}{2} y^2$

Potenzielle Energie $E_{pot} = -F(x) \quad F = \int f(x) dx$

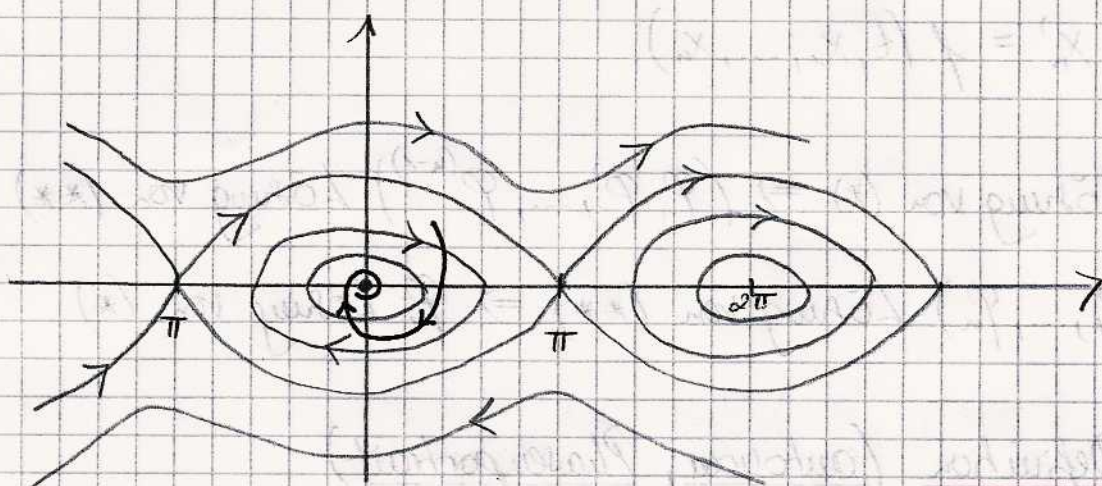
Gesamtenergie $E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} y^2 - F(x)$

$$E' = x' \cdot x'' - f(x) \cdot x' = x' \underbrace{(x'' - f(x))}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ Phasenkurven liegen auf den Niveaulinien von
 $\frac{1}{2} y^2 - F(x) = \text{const}$

Bsp.: Mathematisches Pendel

$$\frac{1}{2} y^2 - \cos x$$



Mathematisches Pendel mit Reibung

$$x'' = -\varepsilon x' - f(x)$$

$$h(x, x') = \frac{1}{2} (x')^2 - F(x)$$

$$(h(x, x'))' = x' x'' - f(x) \cdot x' = x' \underbrace{(x'' - f(x))}_{=-\varepsilon x'} = -\varepsilon (x')^2$$

Räuber-Beute-Modell

$$h(x, y) = bx - l \cdot lux + ay - k \cdot luy$$

$$(h(x, y))' = b \cdot x' - l \cdot \frac{x'}{x} + ay' - k \cdot \frac{y'}{y}$$

$$= bk \cdot x - abxy - l(k - ay) - aly + abxy - k(-l + bx) \\ = 0$$

Phasenkurven liegen auf Niveaulinien von $h(x,y)$

⑨ Satz (Existenz- und Eindeigkeitsatz)

Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$x' = f(t,x)$ DGL-System.

Ist f stetig partiell diffbar, dann existiert $\forall (t_0, a) \in U$
eine Lsg. $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t_0) = a$.

Die Lösung ist eindeutig durch die Anfangswerte
 $\varphi_1(t_0) = a_1, \dots, \varphi_n(t_0) = a_n$ festgelegt.

Die Lsg. φ hängt stetig von den Anfangsparametern
 $t_0, a_1, \dots, a_n$ ab.

Partielle Differentialgleichungen (PDE)

beschreiben Funktionen $u: G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, über
Bedingungen an die partiellen Ableitungen.

Wichtigste Typen sind:

A) Potentialgleichung $G \subset \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

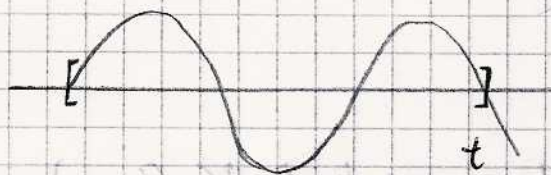
$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \quad \text{Laplace-Operator}$$

Wir suchen Lösung u mit $u|_{\partial G} = u_0$

(eingespannte Membran)

↑
vorgegeben

B) Wellengleichung
 $\mathbb{R} \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$



$$G = [a, b]$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u = \Delta_{xx} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2$$

Gesucht: Lsg. $u(t, x)$ mit $u(0, x) = u_0(x)$

c) Wärmeleitungsgleichung $u: \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{xx} u \quad u(0, x) = u_0(x) \text{ vorgegeben}$$

A, B, C: Elliptisch, Hyperbolisch bzw. Parabolisch

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \Delta_{xx}$$

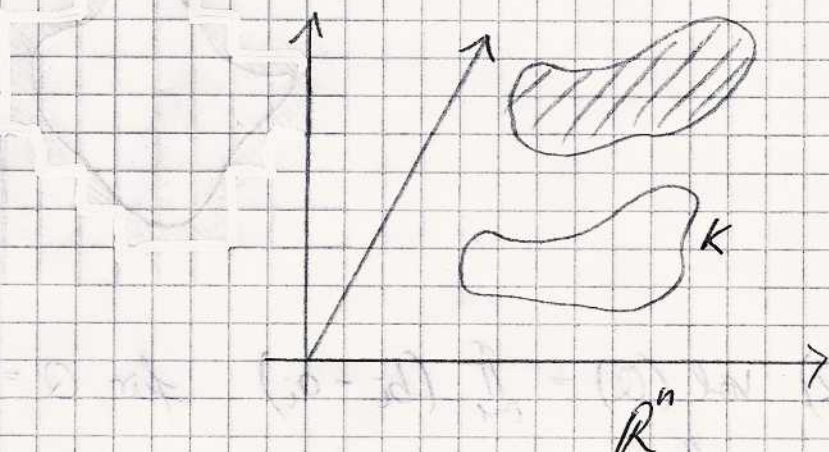
$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{xx}$$

§ 35 Integration im $\mathbb{R}^n$

① Definition $\int_K f(x) dx$

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (also abgeschlossen und beschränkt).
und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren

$$\int_K f(x) dx$$



Sei $\bigcup_{i=1}^r Q_i$ disjunkte Vereinigung von Quadern, die K aufspalten.
Dann heißt

$$\sum_{i=1}^r \min(f|_{Q_i}) \text{vol}(Q_i) \quad \text{eine \underline{Untersumme}}$$

und

$$\sum_{i=1}^r \max(f|_{Q_i}) \text{vol}(Q_i) \quad \text{eine \underline{Obersumme}} \\ \text{für das Integral.}$$

Dabei setzen wir f zu $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f|_{\mathbb{R}^n \setminus K} = 0$
trivial fort.

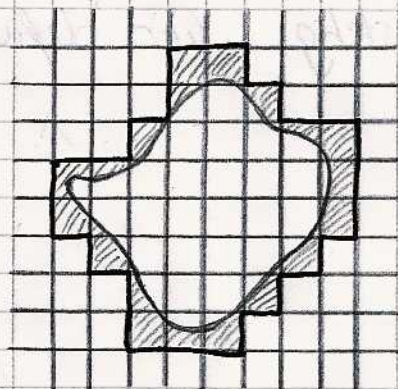
$$\int_K^* f dx = \inf \left\{ \sum \max(f|_{Q_i}) \text{vol}(Q_i) \right. \\ \left. \text{Obersumme} \right\}$$

$$\int_K f dx = \sup \left\{ \sum \min(f|_{Q_i}) \text{vol}(Q_i) \right. \\ \left. \text{Untersumme} \right\}$$

Dann gilt $\int_K^* f dx = \int_{\neq K} f dx =: \int_K f dx$

② Bemerkungen

- 1) Der Integrationsbereich K wird durch $\bigcup Q_i$ mit approximiert.



2) $\text{vol}(Q) = \prod_{i=1}^r (b_i - a_i)$ für $Q =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_r, b_r[$
 " $\text{vol}(\bar{Q})$

3) $\text{vol}(K) := \int_K 1 dx$

Volumen eines Kompaktums

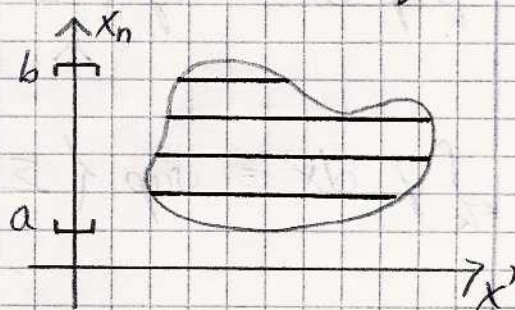
Für praktische Zwecke verwendet man den Satz von Tubini, der Integration in $\mathbb{R}^n$ auf 1-dim. Integration und Integration in $\mathbb{R}^{n-1}$ zurückführt.

③ Satz (von Tubini)

$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $K \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [a, b]$, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$\int_K f(x) dx = \int_a^b \left(\int_{K \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n\}} f(x', x_n) dx' \right) dx_n$$

Funktion $g(x)$



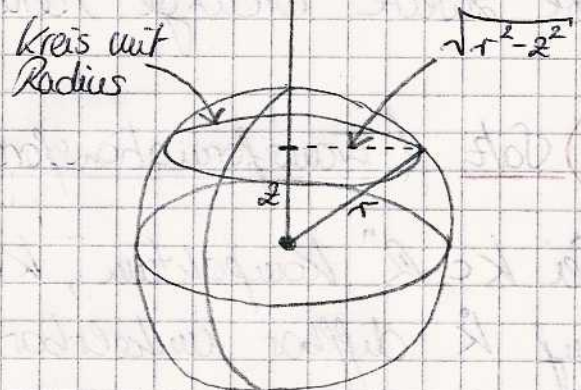
Kein Beweis.

④ Beispiele

a) Volumen der Kugel mit Radius $r \in \mathbb{R}^3$

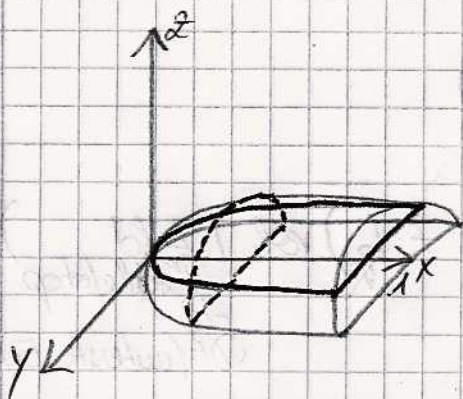
$$K = \overline{B_r(0)} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

$$\begin{aligned} & \int 1 \, dx \, dy \, dz \\ \stackrel{\text{Fubini}}{=} & \int_{-r}^r \left(\int_{\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r^2-z^2\}} 1 \, dx \, dy \right) dz \\ & \underbrace{\text{Kreis}}_{= \pi(r^2-z^2)} \end{aligned}$$



$$= \int_{-r}^r \pi(r^2 - z^2) \, dz = \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left(2r^3 - \frac{2}{3}r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

b) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq x \leq 1, z \geq 0\}$



$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \int_0^1 \left(\int_{\substack{\text{Halbkreise} \\ \text{Radius } \sqrt{x}}} dy \, dz \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2} x \, dx = \frac{\pi x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \int_0^1 \left(\int_{\substack{\text{Schnitte} \\ \text{entlang} \\ z\text{-Achse}}} dx \, dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} (1 - (y^2 + z^2)) \, dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left[y - \frac{y^3}{3} - z^2 y \right]_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= \int_0^1 2 \sqrt{1-z^2} (1 - z^2) - \frac{2}{3} (1 - z^2) \sqrt{1-z^2} \, dz \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{3} (1-z^2)^{3/2} dz \quad \rightarrow \text{Substitution}$$

$$z = \sin \varphi, \quad (1-z^2) = \cos^2 \varphi$$

$$dz = \cos \varphi d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{3} \cos^3 \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= \dots = \pi/4$$

Die zweite wichtige Methode ist die Transformationsformel.

⑥. Satz (Transformationsformel)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $K \subset U$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, auf K diffbar umkehrbar.

Sei $L = F(K)$, $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$\int_L f(y) dy = \int_K f \circ F(x) |\det DF(x)| dx$$

Beweisidee:

$$\int_L f(y) dy \approx \sum_{i=1}^r \max_{Q_i} f|_{Q_i} \text{vol}(Q_i)$$

$$\int_K f \circ F(x) |\det DF(x)| \approx \sum_{j=1}^s \max_{P_j} (f \circ F|_{P_j}) \underbrace{\text{vol}(\text{Bild Parallelepiped der } DF(\text{unterste Ecke}))}_{\text{vol}(DF(Ecke)(P_j))} \text{vol}(P_j)$$

$$U F(P_j) \approx L \approx \cup Q_i$$

$$\underbrace{\text{vol}(DF(Ecke)(P_j))}_{\approx \text{vol}(F(P_j))}$$

Also $|\det DF(x)| = \underline{\text{Volumenverzerrungsfaktor}}$
von F in x

⑦ Beispiele

$$a) E = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

$$E = F(B_1(0)), \text{ wobei } F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\int_E 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{B_1(0)} abc \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi}_{\text{vol}(B_1(0)) \subset \mathbb{R}^3} \cdot abc$$

$$b) \text{ vol}(B_r(0))$$

Kugelkoordinaten

$$P(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

$$\mathbb{D}P = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -\sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbb{D}P = r^2 (\sin \vartheta (\cos \vartheta \sin \vartheta) + \cos^3 \vartheta) \\ = r^2 \cos \vartheta$$

$$\text{vol}(B_r(0)) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 \cdot 2 \, d\varphi \, dr = 4\pi \int_0^r r^2 \, dr \\ = 4\pi \frac{r^3}{3} \quad \blacksquare$$

⑧ Uneigentliche Integrale

Definition: Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\exists \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r(0)} |f(x)| dx$.

Dann heißt f uneigentlich integrierbar.

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r(0)} f(x) dx \quad (\text{konvergiert absolut})$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty} \int_{B_r(0) \setminus B_{r-1}(0)} f(x) dx$$

$W_r(0)$ = Würfel mit Ecken $(\pm r, \dots, \pm r)$

Dann existiert auch

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{W_r(0)} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

⑨ Anwendung: Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \stackrel{(*)}{=} \sqrt{\pi}$

Wir berechnen $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ auf zwei Weisen:

a) mit Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{W_r(0)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

b) mit Transformationsformel

Polarkoordinaten $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\det DP(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r(0)} \dots = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^r = \lim_{r \rightarrow \infty} (\pi(1 - e^{-r^2})) = \pi$$

$\Rightarrow (*)$