

KAPITEL:WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE
UND STATISTIK§ 36 GrundbegriffeBeispiele für Anwendungsbereiche• Warteschlangen: x Nutzer am Terminal $P(x \geq k)$ = Wahrscheinlichkeit, dass $x \geq k$ ist.• probabilistische Algorithmen:

Erwartungswert für Laufzeit solcher Algorithmen

1. BeispieleBetrachte Würfel. Wir würfeln n -mal. n_i -mal taucht die Zahl $i \in \{1, \dots, 6\}$ auf. $\frac{n_i}{n}$ = relative Häufigkeit von $i \approx \frac{1}{6}$ Obwohl wir den Ausgang eines Würfes nicht vorhersagen können, ist die Aussage, dass $\frac{n_i}{n} \approx \frac{1}{6}$ korrekt (falls der Würfel fair ist).

Wahrscheinlichkeitstheorie gibt einen formalen Rahmen.

② Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tupel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

Ω Ereignisraum

$\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ boolesche Algebra von beobachtbaren Ereignissen

$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ Wahrscheinlichkeitsmaß

mit folgenden Eigenschaften

a) 1) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

3) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

1') $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

b) 1) $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0, P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

1') $A_n \in \mathcal{A}, \text{ disjunkt : } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

③ Beispiel

Würfelmodell

$$\Omega = \{1, \dots, 6\} \quad \mathcal{A} = 2^\Omega \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Allgemeiner: Laplace-Modell

Ω endlich, $\mathcal{A} = 2^\Omega$

Jedes $\omega \in \Omega$ tritt wegen Symmetrieüberlegung
gleichhäufig auf $\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Beispiel: Lottozahlen

$$\Omega = \{\omega \subset \{1, \dots, 49\} \mid |\omega| = 6\}$$

Menge der 6-elementigen Teilmengen

Wir können die Lottekugeln mit zwei Zahlen beschriften, etwa rot und schwarz

$\leadsto$ Umnummerierung $\in S_{49}$ (Permutation)

schwarz 1, 2, 3, 4, 5, 6 $\Rightarrow$ gleiche Wahrscheinl.
rot 20, 12, 4, 36, 13, 7 für alle Kombinationen

$$P(\text{Tipp}) = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

④ Bemerkung

Die Bedingung (b1') zwingt uns dazu, $A \neq 2^{-\Omega}$ in vielen Fällen zu wählen.

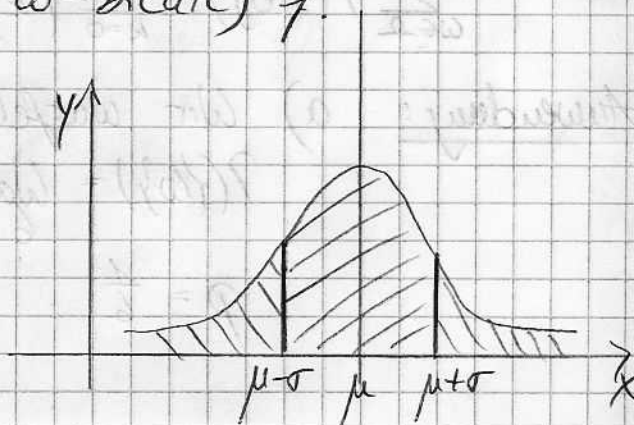
⑤ Beispiel:

1) $\Omega = \mathbb{R}_{\infty}$, $A \ni [a, b]$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stückweise stetig.
mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Wir setzen $P([a, b]) = \int_a^b f(x) dx$
Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) mit
Wahrscheinlichkeitsdichte (W-Dichte) f .

Bsp.: a) Normalverteilung
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit Mittelwert μ
und Varianz σ .

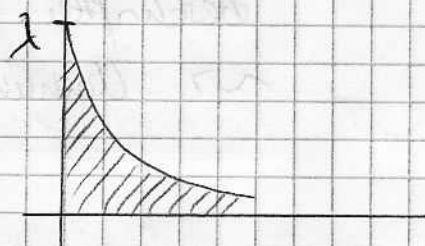


b) Exponentialverteilung mit Parameter λ

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} = t \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{\sigma^2}}$$

$$\leadsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



beschreibt Zerfallszeit eines
einzelnen radioaktiven Atoms.

2) Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ω endliche oder abzählbare Menge

Für $\omega \in \Omega$ sei $P(\{\omega\}) \in [0, 1]$ vorgegeben,

so dß $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.

Dann ist $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ W-Maß

Bsp.: Binomialverteilung $B_{n,p}$ mit Parameter p

$$\Omega = \{0, \dots, n\}, \quad 0 < p < 1$$

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$$

Anwendung: a) Wir würfeln n -mal.

$P(\{k\})$ = Wahrsch., dß genau k -mal die
6 auftritt

$$p = \frac{1}{6}$$

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

b) Maschine produziert n Teile, bei der Produktion besteht ein Ausschussanteil von p .

$$P(\text{genau } k \text{ Teile Ausschuss}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

⑥ Definition (bedingte Wahrscheinlichkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei Ω -Raum, $B \in \mathcal{A}$ ein Ereignis

$\Gamma A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n = \Omega$ Partition

$$(A_1 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) = B$$

$$\sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = P(B)$$

Ist $P(B) > 0$, dann heißt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

die bedingte Wahrscheinlichkeit für A unter der Annahme B .

⑦ Beispiele

A = bei 2x Würfeln mindestens eine 6

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} \approx 0,305...$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eine 6 auftritt unter der Annahme $B = \{\text{Summe} \geq 7\}$?

$$P(A|B) = \frac{11}{21} \approx 0,523$$

1. Würfel

1
2
3
4
5
6

2. Würfel

6
5,6
:
1, ..., 6

insgesamt:

$$1+2+\dots+6 = \binom{7}{2} = 21$$

11 sind ok.

Bsp.: Game-Show

Spiel: Kandidat kann 3 Türen öffnen. Er weiß, daß hinter einer Tür ein Gewinn ist und hinter den anderen nichts.

Spielverlauf: Kandidat sucht eine Tür aus. Showmaster öffnet eine andere mit Verlust und fragt, ob Kandidat seine Auswahl ändern möchte.

Strategie? Mit Wechseln wird die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns ($2/3 : 1/3$)

8. Definition (unabhängig)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei W-Raum. $A, B \in \mathcal{A}$ heißen unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Falls $P(B) > 0$, dann ist $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Bsp.:

2x Würfeln, $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$.

$A = \{\text{mind. eine } 6\}$ $B = \{\text{Summe ist gerade}\}$

1. Würfel 2. Würfel

1
2
3
4
5
6

135
246
135
246
135
246

$$\frac{5}{18} < \frac{11}{36}$$

$\Rightarrow A$ und B
sind abhängig

⑨ Definition (Zufallsvariable)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Eine Abbildung $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ heißt (reelle) Zufallsvariable.
Die Verteilungsfunktion von X ist

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}((-\infty, x]))$$

$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ monoton steigend.

Ist F_X differenzierbar, dann können wir

$P(a < X \leq b)$ durch ein Integral darstellen
" "

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx, \text{ wobei } \frac{d}{dx} F_X = f_X$$

In diesem Fall sprechen wir von einer kontinuierlich verteilten Zufallsvariablen und $\frac{d}{dx} F_X = f_X$ heißt Dichte der Verteilung.

Andererseits gibt es viele Zufallsvariablen, die nur diskrete Werte annehmen, d.h.

$$P(X=x) > 0 \text{ nur für abzählbar viele } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel:

A) Faire Münze

Spieler A: gewinnt bei Kopf 1 €, verliert bei Zahl 1 €.

$S_n \in \mathbb{Z}$ ist Gewinn nach n Spielen.

$$X = \min \{n \mid S_n > 0\} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

In diesem Fall ist X diskret verteilt und F_X eine

Treppenfunktion.

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \quad P(X=2) = 0$$

$$P(X=3) = \frac{1}{8} \quad P(X=4) = 0$$

$$P(X=5) = ?$$

10. Erwartungswerte

X diskrete Zufallsvariable mit endlich vielen Werten

$x_i \in \mathbb{R}$, so dass $P(X=x_i) > 0$, $i=1, \dots, n$.

In diesem Fall ist

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X=x_i) \quad \text{der Erwartungswert von } X.$$

a) Ist X eine diskrete (nicht notwendig endliche) Zufallsvariable mit Werten x_i mit $i \in \mathbb{N}$, dann sei

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i)$$

Erwartungswert, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X=x_i) < \infty$.

Beispiel:

X sei binomialverteilt, $\mathcal{B}_{n,p}$.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \stackrel{!}{=} n \cdot p$$

b) X kontinuierlich verteilte Zufallsvariable, Dichte f_X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{falls} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

Beispiel

X normalverteilte Zufallsvariable $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1 \right)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Substitution: $t = x - \mu, dt = dx$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$= 0 + \mu \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-t^2}{e^{2\sigma^2}} dt}_{=1} = \mu$$

11) Bemerkung

Sei X Zufallsvariable, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion.

$Y = \varphi \circ X$ ebenfalls Zufallsvariable mit Erwartungswert

$$E(Y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) P(X=x) \quad \begin{array}{l} \text{im diskreten Fall} \\ \text{bei absoluter Konvergenz} \end{array}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{im kontinuierlichen Fall} \\ \text{bei absoluter Konvergenz} \end{array}$$

12) Definition (k-tes Moment)

$$\varphi(t) = t^k, X^k = \varphi \circ X$$

Hat X^k Erwartungswert, dann heißt $E(X^k)$

k-tes Moment von X .

$$\text{Speziell } \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E((X-\mu)^2) = \mu = E(X)$$

Varianz von X (falls existiert)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2\end{aligned}$$

Bsp: X , $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, $\text{Var}(X^2) = \sigma^2$

Beweis: Übung

§ 37 Kombinatorik und erzeugende Funktionen

1. Auswählen

Gegeben sind n Objekte, von denen wir k auswählen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es?

	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
geordnet	$(n)_k$ $= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$	$\leq n \geq k$ $= n^k$
ungeordnet	$\binom{n}{k}$ $= \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\leq n \geq k$ $= \binom{n-1+k}{k}$

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

Wir haben eine Reihe von $n-1+k$ Punkten

$$\cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \times \times \cdot \cdot \cdot \cdot \times \quad \begin{matrix} k=8 \\ n=6 \end{matrix}$$

Wir markieren $(n-1)$ von diesen

$$\sum_{i=1}^n k_i = k = (n-1+k) - (n-1)$$

$$(n)_k = k! \binom{n}{k}$$

2. Satz (Sterlingsche Formel)

$$n! \approx \sqrt{2n \cdot \pi} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Kein Beweis

③ Beispiel: Fairer Münzwurf

Kopf = +1 €, Zahl = -1 €

S_n = Gewinn nach n Spielen

$$P(S_{2n} = 0) = ?$$

$$= \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot 2^{-2n} \approx \frac{\sqrt{4n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n)^2} \cdot 2^{-2n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n \cdot \pi}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

genauer $\in O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

④ Erste Wechselzeit

Gleiches Spiel

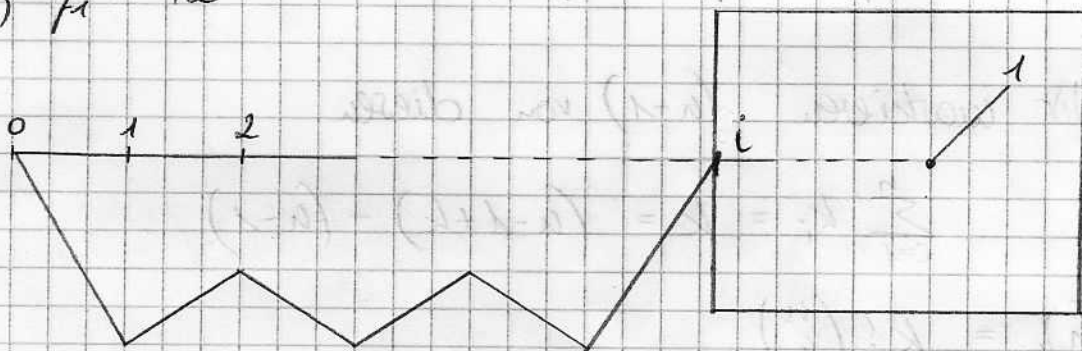
Strategie von Spieler A:

Stoppt das Spiel, wenn zum ersten Mal Gewinn.

S_n = Gewinn nach n Spielen.

$$f_n = P(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0, S_n = 1) = ?$$

$$f_0 = 0, f_1 = 1/2$$



Für jeden Pfad $f: i$, so daß $s_2 \leq -1, \dots, s_{i-1} \leq -1, s_i = 0$

$$f_n = \sum_{i=2}^{n-1} \underbrace{P(s_2 \leq -1, \dots, s_{i-1} \leq -1, s_i = 0)}_{\frac{1}{2} f_{i-1}} f_{n-i}$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} f_{i-1} f_{n-i}$$

(5) Definition (erzeugende Funktion)

Sei $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge. Dann heißt

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad \text{erzeugende Funktion.}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} x^n \cdot \sum_{i=1}^{n-2} f_{i-1} \cdot f_{n-(i+1)} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sum_{i=1}^{\infty} f_i x^i \cdot \underbrace{\sum_{n=i+2}^{\infty} x^{n-i-1}}_{\sum_{j=1}^{\infty} x^j} \cdot f_{n-(i+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x F(x)^2$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x}{2} (1 + F(x)^2)$$

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k x^{2k}$$

$$\Rightarrow F(x) = \binom{1/2}{1} x - \binom{1/2}{2} x^3 + \binom{1/2}{3} x^5 - \dots$$

$$\Rightarrow f_n = \begin{cases} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1} & \text{für } n=2k-1 \\ 0 & \text{für } n=2k \end{cases}$$

$X = \min \{n \mid S_n > 0\}$ diskrete Zufallsvariable

$$P(X=n) = f_n$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_n$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

$$x \frac{d}{dx} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n x^n$$

$$\Rightarrow E(X) = \left(x \frac{d}{dx} F(x) \right)_{x=1}$$

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right)' = \frac{x \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} - (1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - \sqrt{1-x^2} + 1 - x^2}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow x \frac{d}{dx} F = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x \sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \left(x \frac{d}{dx} F \right)_{x=1} = \infty$$

(5) Definition (erzeugende Funktion)

$(f_n)_{n \geq 0}$ Folge. Dann heißt

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

die erzeugende Funktion der Folge.

x heißt erzeugende Variable.

$F(x)$ ist eine (nicht notwendig konvergente) Potenzreihe.

(6) Beispiele

a) konstante Folge

$$(1+x+x^2+x^3+\dots) = \frac{1}{1-x}$$

$$b) (1+x+x^2+\dots)^n = (1-x)^{-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} x^k$$

Was sind die Koeffizienten $c_{n,k}$?

Betrachte n Urnen, jede Urne entspricht einem Faktor $(1+x+x^2+\dots)$, in die wir k gleiche Kugeln legen wollen.

Etwa k_1 in die erste Urne, k_2 in die zweite, ..., k_n in die n -te.

$$x^{k_1} \cdot x^{k_2} \cdot \dots \cdot x^{k_n}, \text{ wobei } k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$\Rightarrow c_{n,k} = \langle \binom{n}{k} \rangle = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

$$(1+x+x^2+\dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \binom{n}{k} \rangle x^k$$

- c) Wir wollen die Anzahl bestimmen für Verteilung von k Kugeln auf n Urnen, so daß jede nichtleere Urne wenigstens 2 Kugeln enthält.

Antwort:

$$\begin{aligned}
 & \text{Der Koeffizient von } x^k \text{ in } (1+x^2+x^3+\dots)^n \\
 &= \left(\frac{1}{1-x} - x\right)^n \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-x)^i (1-x)^{-(n-i)} \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x^i \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-i}{j} x^j \quad j=k-i \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\min(n,k)} \binom{n}{i} (-1)^i \binom{n-i}{k-i} \right) x^k
 \end{aligned}$$

Bsp.: $n=3, k=2$

$$\begin{aligned}
 & \binom{3}{0} \binom{3}{2} - \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{3}{2} \binom{1}{0} \\
 &= 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3
 \end{aligned}$$

- d) k gleiche Kugeln auf n Urnen, die je höchstens d Kugeln enthalten:

Antwort: Koeffizient von x^k in

$$(1+x+x^2+\dots+x^d)^n = \frac{(1-x^{d+1})^n}{(1-x)^n}$$

- e) Eine Urne mit ≤ 2 Kugeln, eine mit ≤ 3 und eine mit ungerader Anzahl Kugeln.

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+\dots)$$

$$= \frac{(1-x^3)(1-x^4)}{(1-x)^2(1-x^2)} = \frac{(1-x^3)(1-x^4)(1+x)^2}{(1-x^2)^3}$$

$$= (1-x^3)(1-x^4)(1+x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \langle 3 \rangle_k x^{2k}$$

$$= (1+2x+x^2-x^3-2x^4-x^5-x^6-2x^7-x^8+2x^9+x^{10}) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \langle 3 \rangle_j x^{2j} \right)$$

$$= (1+2x+x^2-x^3-3x^4-3x^5-x^6+x^7+2x^8+x^9) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \langle 3 \rangle_j x^{2j} \right)$$

$$k=2j: \langle 3 \rangle_j + \langle 3 \rangle_{j-1} - 3\langle 3 \rangle_{j-2} - \langle 3 \rangle_{j-3} + 2\langle 3 \rangle_{j-4}$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{2} + aj + b$$

⑦ Manipulation von erzeugenden Funktionen

Eigenschaft	Folge	erzeugende Funktion
Definition	f_i	$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$
Summe	$a f_i + b g_i$	$a F(x) + b G(x)$
Faltung	$h_i = \sum_{j=0}^i f_j g_{i-j} \quad *$	$H(x) = F(x) \cdot G(x)$
Shift	pos. $f_{i-n} \quad i \geq n$	$x^n \cdot F(x)$
	weg. f_{i+n}	$F(x) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j x^j / x^n$
Skalieren	geometr. $f_i a^i$	$F(ax)$
	linear $i f_i$	$x \frac{d}{dx} F(x)$
	faktoriell $(i)_k f_i$	$x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^k F(x)$
	harmonisch $\frac{f_{i-1}}{i} \quad i \geq 1$	$\int_0^x F(t) dt$
Summation	kumulativ $\sum_{j=0}^i f_j$	$\frac{F(x)}{1-x}$
	vollständig $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$	$F(1)$
	alternierend $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i f_i$	$F(-1)$

⊛

$$\begin{aligned}
 F(x)G(x) &= (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots) (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots) \\
 &= f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0) x + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0) x^2 + \dots \\
 &\quad + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^i f_j g_{i-j} \right)}_{= h_i} x^i + \dots
 \end{aligned}$$

<u>Sequenzwerte</u>	Anfang	f_0	$F(0) =$
	k-ter Wert	f_k	$\left(\left(\frac{d}{dx} \right)^k \frac{F(x)}{k!} \right) \Big _{x=0}$
	Grenzwert	$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i$	$\lim_{x \rightarrow 1} [(1-x) F(x)]$

$$(1-x)F(x) = f_0 + (f_1 - f_0)x + (f_2 - f_1)x^2 + \dots$$

$$\Big|_{x=1} \quad \text{k-te Partialsumme}$$

$$f_0 + (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \dots + (f_k - f_{k-1}) = f_k$$

⑧ Anwendung

Erwartungswert von einer B_{np} -verteilten Zufallsvariablen X

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Erzeugende Funktion

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k \right] = (px + 1-p)^n$$

$$x \frac{d}{dx} F(x) = \sum_{i=0}^n i f_i x^i$$

$$E(X) = \left(x \frac{d}{dx} F(x) \right) \Big|_{x=1} = \left[np x \cdot (px + 1-p)^{n-1} \right] \Big|_{x=1}$$

$$= np \underbrace{(p + 1-p)}_{=1}^{n-1} = np$$

⑨ Bemerkung

Erzeugende Funktionen brauchen wir nur als formale Potenzreihen zu kennen.

Bsp.: d_k = Anzahl der Möglichkeiten, k als Summe von paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen darzustellen.

Bsp.: $k=5$ $5 = 4+1 = 3+2$

$$D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$$
$$= \prod_{j=1}^{\infty} (1+x^j)$$

Bsp.: P_k = Anzahl der Partitionen von k
= Anzahl, mit der wir k als Summe von pos. ganzen Zahlen darstellen können

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

P wurde von Euler, Romanujan u.a. ausgiebig studiert.

10. Lineare Rekursion

(f_n) Folge mit $f_{n+1} = a f_n + b f_{n-1}$
 f_0, f_1 vorgegeben

$$F(x) (1 - ax - bx^2) = c + dx$$

$$(f_0 + f_1 x + \dots)(1 - ax - bx^2) = f_0 + (f_1 - a f_0)x$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{c + dx}{1 - ax - bx^2}$$

Partialbruchzerlegung

$$(1 - \alpha x - \beta x^2) = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$$

$$\frac{c + dx}{1 - \alpha x - \beta x^2} = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x}$$

$$\Rightarrow f_n = A \alpha^n + B \beta^n$$

Bsp.: $f_{n+1} = 2f_n + f_{n-1}$

$$(f_0, f_1, \dots) = (1, 1, 3, 7, 17, 41, \dots)$$

Wir bestimmen c und d .

$$c = f_0 = 1$$

$$d = 1 - 2 = -1$$

$$\frac{1 - x}{1 - 2x - x^2} = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x}$$

α, β Nullstellen von $t^2 - 2t - 1 = 0$

$$\alpha, \beta = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$A + B = 1, \quad B = 1 - A$$

$$A\beta + B\alpha = 1, \quad \underbrace{A(\beta - \alpha)}_{-2\sqrt{2}} = 1 - \alpha = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} = B$$

$$f_n = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})^n + \frac{1}{2} \underbrace{(1 - \sqrt{2})^n}_{|1| \leq 1} \approx \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})^n$$

Partialbruchzerlegung

$$(1-0x-0x^2) = (1-x)(1-0x)$$

$$\frac{1}{1-0x-0x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-0x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-0x}$$

$$\text{Ggf: } \frac{1}{1-x} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-0x}$$

$$(1-0x-0x^2) = (1-x)(1-0x)$$

Wir bestimmen C und D

$$C = \frac{1}{1-0x} = 1$$

$$D = \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\frac{1}{1-0x-0x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-0x}$$

$$0 = 1 - 0x - 0x^2 \text{ mit Partialbruch}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} = 1 = \frac{1}{1-x}$$

$$A+B=1, \quad 1=0x+0x^2$$

$$1-0x-0x^2 = (1-x)(1-0x) = 1-0x-0x^2$$

$$B = \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-0x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-0x}$$

§ 38 Summen von Zufallsvariablen

Motivation

Münzwurfsperiment : X_i ist $B_{n,p}$ -verteilt

$$P(X_i = 0) = 1 - p$$

$$P(X_i = 1) = p$$

$$E(X_i) = p$$

Wir betrachten eine Folge X_i von solchen Experimenten
und setzen $S_n = X_1 + \dots + X_n$

S_n ist $B_{n,p}$ -verteilt

Erwartungswert $E(S_n) = n \cdot p$

$$E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = p$$

Ziel dieses Paragraphen:

- Schwaches Gesetz der großen Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

- Starkes Gesetz der großen Zahl

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{1}{n} S_n - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

- Zentraler Grenzwertsatz

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} S_n - E(X)\right) \xrightarrow[\text{distribution}]{D} N(0, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

1. Enumeration

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$$

heißt Zufallsvariable (ZV)

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F_X(a) = P(X \leq a) \\ = P(X^{-1}((-\infty, a]))$$

heißt Verteilungsfunktion von X

Wir unterscheiden zwei Fälle

a) X diskrete ZV mit nicht neg. ganzzahligen Werten

$$P(X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) = 1$$

und

$f_i = P(X=i)$ heißt Masse von X in i

und

erzeugende Funktion (generating function)

$$G_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i \quad (\text{Potenzreihe})$$

Es gilt

$$G_X(1) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i = 1 \Rightarrow \text{Konvergenzradius} \geq 1$$

und

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i f_i = \left(z \frac{d}{dz} G_X(z) \right)_{z=1} \text{ falls existent}$$

b) X kontinuierlich verteilt, d.h. $\exists$ W-Dichte $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

so daß

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt$$

②

Seien X, Y zwei ZV. Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) ist $F_{(X,Y)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$

$$F_{(X,Y)}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$

Das Paar (X, Y) heißt kontinuierlich verteilt, wenn eine W-Dichte $f_{(X,Y)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert.

mit

$$F_{(X,Y)}(a,b) = \int_{-\infty}^a \left(\int_{-\infty}^b f_{X,Y}(s,t) ds \right) dt$$

③ Definition (stochastisch gleich)

Zwei ZV X, Y heißen stochastisch gleich (in Zeichen $X \stackrel{st}{=} Y$) wenn $F_X = F_Y$.

Übung: $X_1 \stackrel{st}{=} X, X_2 \stackrel{st}{=} X \not\Rightarrow X_1 + X_2 = 2X$

Bsp: X_1, X_2 $B_{n,p}$ -verteilte ZV aus verschiedenen Münzexperimenten

$$P(X_1 + X_2 = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P(X_1 + X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_1 + X_2 = 2) = \frac{1}{4}$$

$$P(2X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(2X = 1) = 0$$

$$P(2X = 2) = \frac{1}{2}$$

④ Definition (unabhängig)

Zwei ZV X, Y heißen unabhängig, wenn
$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von $X \leq x$ unter
Annahme $Y \leq y$ ist

$$P(X \leq x / Y \leq y) = \frac{P(X \leq x, Y \leq y)}{\underbrace{P(Y \leq y)}}_{\text{sofern dies } > 0}$$

Also: unabhängig $\Rightarrow P(X \leq x / Y \leq y) = P(X \leq x)$

Seien (X, Y) kontinuierlich verteilt, dann gilt

$$P(Y=y) = \lim_{a \rightarrow y} \int_a^y f_Y(t) dt = 0$$

$P(X \leq x / Y=y)$ lässt sich nicht mit der obigen
Formel definieren.

Korrekt ist

$$P(X \leq x / Y=y) = \int_{-\infty}^x f_{(X,Y)}(t,y) dt / \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dx$$

⑤ Lemma

X und Y kontinuierlich verteilte ZV.

X und Y sind unabhängig $\Leftrightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Beweis:

$$\text{unabhängig} \Rightarrow P(a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2) = P(a_1 \leq X \leq a_2) \cdot P(b_1 \leq Y \leq b_2)$$

$$\Rightarrow \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f_{(X,Y)}(s,t) ds dt = \int_{a_1}^{a_2} f_X(s) ds \cdot \int_{b_1}^{b_2} f_Y(s) ds$$

Multiplizieren

$$\frac{1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{1}{b_2 - b_1} \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{a_2 \rightarrow a_1 \\ b_2 \rightarrow b_1}} \text{ gibt } f_{(X,Y)}(a_1, b_1) = f_X(a_1) \cdot f_Y(b_1)$$

$\Rightarrow X, Y$ hat Produktverteilung

Analoge Aussage gilt für zwei diskrete ZV.

6. Satz

Seien X und Y kontinuierlich verteilte, unabh. ZV.
mit Dichten f und g .

Dann hat die ZV $Z = X + Y$

die W-Dichte $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$

Beweis:

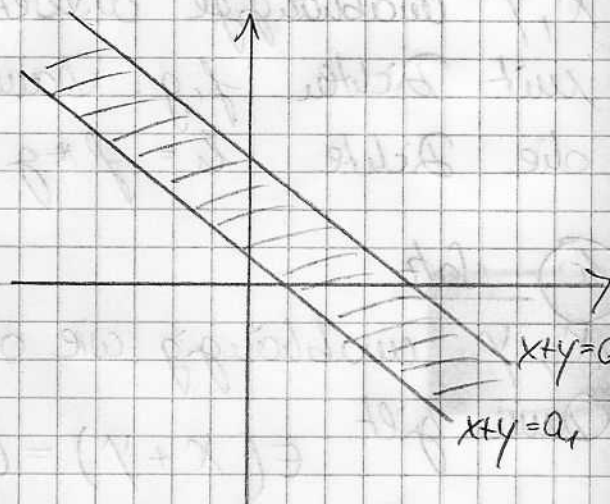
$$P(a_1 \leq Z \leq a_2) = P(a_1 \leq X + Y \leq a_2)$$

$$= \iint_{\text{streifen}} f_{(X,Y)}(s,t) ds dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a_1-y}^{a_2-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a_1}^{a_2} f_X(t-y) f_Y(y) dt dy \quad t = x+y$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) f_Y(y) dy \right)}_{= h(x)} dx$$



⑦. Definition (Faltung)

Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Dann heißt $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

die Faltung von f und g (sofern Integral existiert).

⑧. Bemerkung

X, Y unabhängige diskret ganzzahlig positiv verteilte ZV.
mit Verteilung $f_i = P(X=i)$, $g_j = P(Y=j)$

Dann ist $Z = X + Y$ diskret verteilt mit

Verteilung $P(Z=i) = h_i = \sum_{j=0}^i f_{i-j} g_j$

Zu den Folgen $(f_i), (g_i)$ heißt

$h = f * g$ mit $h_i = \sum_{j=0}^i f_{i-j} g_j$ die Faltung der Folgen.

Faltung von Funktionen ist kontinuierliches Analog zur Faltung von Folgen.

⑨. Korollar

X, Y unabhängige diskrete oder kontinuierliche ZV.
mit Dichten f, g . Dann hat $Z = X + Y$
die Dichte $h = f * g$.

⑩. Satz

X, Y unabhängig wie oben.

Dann gilt $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
sofern die Erwartungswerte existieren.

Beweis:

Kontinuierlicher Fall

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\ t &= x-y, \quad x = t+y : \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (t+y) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(y) dy dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) g(y) dt dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(t) g(y) dt dy \\ &= E(X) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy \cdot 1 \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

Im diskreten Fall analog.

11. Beispiel

X $B_{n_1, p}$ -verteilt, Y $B_{n_2, p}$ -verteilt, unabhängig.

Dann $G_X(z) = (1-p + zp)^{n_1}$

$$G_Y(z) = (1-p + zp)^{n_2}$$

$X+Y$ ist mit Faltung verteilt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_{X+Y}(z) &= (1-p + zp)^{n_1} (1-p + zp)^{n_2} \\ &= (1-p + zp)^{n_1+n_2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow X+Y$ ist $B_{n_1+n_2, p}$ -verteilt.

Problem:

Kommutativität

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) dP = \int_{-\infty}^{\infty} x dP + \int_{-\infty}^{\infty} y dP = E(X) + E(Y)$$

$$E(X+Y) = E(Y+X)$$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) dP = \int_{-\infty}^{\infty} x dP + \int_{-\infty}^{\infty} y dP = E(X) + E(Y)$$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) dP = \int_{-\infty}^{\infty} x dP + \int_{-\infty}^{\infty} y dP = E(X) + E(Y)$$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) dP = \int_{-\infty}^{\infty} x dP + \int_{-\infty}^{\infty} y dP = E(X) + E(Y)$$

$$E(X+Y) = E(Y+X)$$

in der Wahrscheinlichkeitstheorie

① Beispiel

Ein Zufallsvektor (X, Y) mit der Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{für } x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{für } x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man berechne $E(X)$ und $E(Y)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y) dy dx$$

$$= \int_0^1 x \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 x \left(1-x - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \left(1-x - \frac{1-x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 x \left(\frac{1-x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) dx$$

12. Geometrisch verteilte ZV

Modell: Urne mit grünen und roten Kugeln
Anteil der roten = p

Ziehen mit Zurücklegen, solange bis wir eine rote Kugel ziehen. X ist die Anzahl der Ziehungen.

$$P(X=i) = (1-p)^{i-1} p$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=i) = p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

X heißt geometrisch verteilt ($G_{1,p}$ -Verteilung)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} i (1-p)^{i-1} \cdot p \\ &= p \cdot (-1) \frac{d}{dp} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i \right) \\ &= p \cdot (-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1 \right) \\ &= -p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = -p \left(\frac{-1}{p^2} \right) = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

13. Bemerkung

Sei X eine diskrete ZV mit Werten $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ohne Gedächtnis, d.h. $P(X=i | X > i-1) = P(X=1)$

$\Rightarrow X$ ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = P(X=1)$

Beweis:

$$\beta_i = P(X=i)$$

$$\alpha_{i-1} = P(X > i-1) = \beta_i + \beta_{i+1} + \dots = \sum_{j \geq i} \beta_j$$

$$P(X=i | X > i-1) = \frac{\beta_i}{\alpha_{i-1}}$$

$$\beta_i = \alpha_{i-1} - \alpha_i \quad \text{Annahme} \Rightarrow \beta_1 = \frac{\beta_i}{\alpha_{i-1}} = 1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = (1 - \beta_1) \alpha_{i-1}$$

$$\text{Rekursiv einsetzen} \Rightarrow \alpha_i = (1 - \beta_1)^i$$

$$\Rightarrow \beta_i = (\alpha_{i-1}) \cdot \beta_1 = (1 - \beta_1)^{i-1} \cdot \beta_1 \quad \text{wie behauptet.}$$

14. Satz

X, Y ZV mit Erwartungswerten

Dann gilt $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Beweis:

$Z := X+Y$. X, Y kontinuierlich

$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gemeinsame Verteilung

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^a f(x,y) dx dy$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$$

Analog $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$

Schliefstück $f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y,y) dy$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) (x-y,y) dy dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E(X) + E(Y)$$

15. Definition (Covarianz)

X, Y ZV.

$$\begin{aligned}\text{Var}(X+Y) &= E((X+Y - E(X+Y))^2) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2E(X \cdot Y - E(X) \cdot E(Y))\end{aligned}$$

$\text{Cov}(X, Y) := E(X \cdot Y - E(X) \cdot E(Y))$ heißt
Covarianz von X und Y .

16. Bemerkung

a) $\text{Cov}(X, X) = E(X^2 - E(X)^2) = E(X - E(X))^2 = \text{Var}(X)$.

b) X, Y unabhängig $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

Deshalb betrachtet man die Covarianz als ein Maß für Abhängigkeit.

Warnung: $\text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X, Y$ unabhängig

Bsp.: X diskret mit Werten $+1, 0, -1$
mit Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{3}$. $Y = |X|$

$$E(X \cdot Y) = E(X) = 0$$

$$\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y), \text{ da } 0 = 0 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0, \text{ aber } Y \text{ determiniert von } X.$$

17. Definition (Korrelationskoeffizient)

X, Y ZV.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

heißt Korrelationskoeffizient zwischen X und Y .

$$\rho(X, Y) \in [-1, 1]$$

$$Y = aX, a > 0 \leadsto \rho(X, Y) = 1$$

$$a < 0 \leadsto \rho(X, Y) = -1$$

Beweis von $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$:

$$\text{Covarianzmatrix } C = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

$$\rho(X, Y) \in [-1, 1] \Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y)^2 \leq \text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)$$

$$\Leftrightarrow \det C \geq 0$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) C \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \text{Var}(\alpha X + \beta Y) \geq 0$$

$$\Rightarrow C \text{ ist pos. semi-definit} \Rightarrow \det C \geq 0$$

Allgemein:

$X_1, \dots, X_n$ ZV

Dann ist $(\text{Cov}(X_i, X_j))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$ pos. semi-definit

$$\begin{aligned} \text{da } (a_1, \dots, a_n) \cdot (\text{Cov}(X_i, X_j)) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ = \text{Var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Einige fundamentale Ungleichungen

$$X \text{ ZV}, P(X \geq t) = ?$$

18. Satz (Markov-Ungleichung)

X ZV, h mon. wachsende, nicht negative Funktion,
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Dann gilt

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(h(X))}{h(t)}$$

Beweis:

X kontinuierlich

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$$

$$\geq \int_t^{\infty} h(x) f_X(x) dx, \text{ da } h \text{ positiv}$$

$$\geq h(t) \cdot \int_t^{\infty} f_X(x) dx, \text{ da } h \text{ monoton}$$

$$= h(t) \cdot P(X \geq t)$$

Spezialfall:

$$h(t) = \max(t, 0) = t^+$$

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(\max(X, 0))}{t}$$

für $t > 0$

19. Korollar (Chebyshev)

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}$$

Beweis:

$$Y := (X - E(X))^2$$

Dann $E(Y) = \text{Var}(X)$

$$P(|X - E(X)| \geq t) = P(Y \geq t^2) \leq \frac{E(Y)}{t^2} \text{ nach Markov.}$$

Wesentlich bessere Schranken bekommt man, wenn wir voraussetzen, dass alle Momente $E(X^n)$ existieren.

20. Definition (erzeugende Fkt. für Momente)

Die erzeugende Funktion für die Momente ist die Potenzreihe (X kontinuierlich)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_X(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x) dx = E(e^{\theta x}) \\ &= 1 + E(X)\theta + E(X^2) \frac{\theta^2}{2!} + \dots + E(X^n) \frac{\theta^n}{n!} \\ &\quad \text{in } \theta. \end{aligned}$$

Bemerkung:

$\mathcal{M}_X$ verallgemeinert die erzeugende Funktion.

$$g_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) \cdot z^i \text{ im diskreten Fall.}$$

X diskret

$$\Rightarrow E(e^{\theta x}) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) \cdot e^{\theta i} = g_X(e^{\theta})$$

$$\mathcal{M}_X(\theta) = g_X(\ln \theta) \text{ im diskreten Fall.}$$

$$\theta > 0: h(t) = e^{\theta t} \text{ pos. mon. wachsend}$$

$$\text{Markov} \Rightarrow P(X \geq t) \leq \frac{\mathcal{M}_X(\theta)}{h(t)} = e^{-\theta t} \cdot \mathcal{M}_X(\theta)$$

21. Satz (Chernoff-Schranke)

$$P(X \geq t) \leq \inf_{\theta \geq 0} e^{-\theta t} M_X(\theta)$$

22. Beispiel

Y_i : $B_{1,1/2}$ -verteilt, Münzwurf, unabhängig

$$X_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

$$E(X_n) = \frac{n}{2}, \text{Var}(X_n) = n \cdot \text{Var}(Y_1) = n \cdot E((Y_1 - \frac{1}{2})^2) = \frac{n}{4}$$

$$g_{X_n}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^n, M_{X_n}(\theta) = \left(\frac{1+e^\theta}{2}\right)^n$$

$$\alpha > \frac{1}{2}: P(X_n \geq \alpha \cdot n)$$

1. Markov $P(X_n \geq \alpha \cdot n) \leq \frac{n/2}{\alpha \cdot n} = \frac{1}{2\alpha}$

2. Chebyshev $P(X_n \geq \alpha n) \leq \frac{1}{4n(\alpha - 1/2)^2}$

Beweis: $\alpha n = \frac{n}{2} + (\alpha - \frac{1}{2})n$

$$P(X_n - \frac{n}{2} \geq (\alpha - \frac{1}{2})n) \leq P(|X_n - \frac{n}{2}| \geq (\alpha - \frac{1}{2})n) \leq \frac{1/4}{((\alpha - \frac{1}{2})n)^2}$$

3. Chernoff

$$P(X_n \geq \alpha n) \leq \exp(-n\beta)$$

$$\text{wobei } \beta = \ln(2 \cdot (1-\alpha)) + \alpha \cdot \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) > 0$$

Idee: $P(X_n \geq \alpha n) = \inf_{\theta} \underbrace{e^{-\theta \alpha n} \left(\frac{1+e^\theta}{2}\right)^n}_{g(\theta)^n}$

$$g(\theta) = e^{-\theta \alpha} \left(\frac{1+e^\theta}{2}\right)$$

Wir suchen Minimum von g ;

$$g'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta^* = \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

①) Definition

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

②) Properties

f is a function, $f: A \rightarrow \{0, 1\}$

$$f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$f(x) = 1 \iff x \in A \iff f(x) = 1 \iff x \in A$$

$$\mathcal{M}_X(\theta) = E(e^{\theta X})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(X^n) \cdot \frac{\theta^n}{n!} = 1 + E(X)\theta + E(X^2) \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

23) Satz

a) X ZV mit Momente. Dann gilt

$$\mathcal{M}_{aX+b}(\theta) = e^{b\theta} \cdot \mathcal{M}_X(a\theta)$$

b) X, Y unabh. ZV mit Momente. Dann gilt

$$\mathcal{M}_{X+Y}(\theta) = \mathcal{M}_X(\theta) \cdot \mathcal{M}_Y(\theta)$$

c) X, Y ZV. $\exists$ Intervall I um 0, so dass $\mathcal{M}_X(\theta) = \mathcal{M}_Y(\theta) \forall \theta \in I$, dann folgt $X \stackrel{d}{=} Y$, d.h. X und Y haben die gleiche Verteilung.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{a) } E(e^{\theta(ax+b)}) &= E(e^{\theta b} \cdot e^{\theta ax}) \\ &= E(e^{\theta b}) \cdot E(e^{\theta ax}) = e^{\theta b} \cdot E(e^{\theta ax}) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \mathcal{M}_{X+Y}(\theta) = E(e^{\theta(X+Y)}) = E(e^{\theta X} \cdot e^{\theta Y})$$

mit X und Y sind auch $e^{\theta X}$ und $e^{\theta Y}$ unabhängig.

$$= E(e^{\theta X}) \cdot E(e^{\theta Y}) = \mathcal{M}_X(\theta) \cdot \mathcal{M}_Y(\theta)$$

c) hier kein Beweis

Aussage:

Kennt man $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \quad \forall \theta \in I,$

dann lässt sich $f(x)$ rekonstruieren.

Bemerkung:

c) ist nicht richtig ohne die Konvergenzvoraussetzung
alle Momente gleich $\nRightarrow$ Verteilungen gleich

24.) Schwaches Gesetz der großen Zahl

$X_i, i \geq 1$ gleichverteilte, unabhängige ZV, $X \stackrel{st}{=} X_i$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

Dann gilt $E(S_n) = \sum E(X_i) = n \cdot E(X)$

$$\text{Var}(S_n) = n \cdot \text{Var}(X)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = E(X)$$

Satz: (Schwaches Gesetz der großen Zahl)

X_i gleichverteilte, unabh. ZV mit Erwartungswert und Varianz
Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Beweis:

Chebyshev

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) &= \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \varepsilon^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

25. ohne Beweis formulieren wir

Satz (starkes Gesetz der großen Zahl)

X_i unabh., gleichverteilte ZV mit Erwartungswert und Varianz

$$P\left(\liminf_n \left|\frac{1}{n}S_n - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Bemerkung:

Das schwache Gesetz besagt, daß in Zufallsexperimenten im Mittel

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Das starke Gesetz macht eine Aussage über einzelne (unendliche) Zufallsexperimente:

Die Möglichkeit, daß $\left(\liminf_n \left|\frac{1}{n}S_n - E(X)\right| \geq \varepsilon\right)$ in Zufallsexperiment gilt, hat Wahrscheinlichkeit 0.

26. Definition (Konvergenz in Verteilung)

Sei (Y_n) eine Folge von ZV, Y eine weitere.

(Y_n) konvergiert in Verteilung (distribution) gegen Y ,
 $(Y_n \xrightarrow{D} Y)$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x) \quad \text{für alle } x, \text{ in denen } F_Y \text{ stetig ist.}$$

F_n Sprung bei $a_n, a_n \rightarrow a$.

Dann ist $\lim_n F_n(a) \neq F(a)$

Beispiel:

$$Y_n = \frac{1}{n} S_n - E(X) \xrightarrow{D} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad P(Y=0) = 1$$

(27.) Beispiel

Binomialverteilung mit gleichem Erwartungswert λ

$$E(B_{np}) = n \cdot p = \lambda$$

X_n ZV, die $B_{n, \lambda/n}$ -verteilt ist

$$P(X_n = i) = \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} = \frac{\binom{n}{i}}{n^i} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i}$$

Für festes i konvergiert dieses

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{i}}{n^i} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

(28.) Definition (Poisson-Verteilung)

Die Verteilung P_λ mit $P(P_\lambda = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, $E(P_\lambda) = \lambda$
heißt Poisson-Verteilung

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Folgerung:

Y_n sei B_{n, λ_n} -verteilt, Y P_λ -verteilt.

$$Y_n \xrightarrow{D} Y$$

$$g_{P_\lambda}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} x^i = e^{\lambda(x-1)}$$

(29.) Folgerung

$X_1, \dots, X_n$ seien Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ unabhängig.

Dann folgt $X_1 + \dots + X_n$ ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert $E(X_1 + \dots + X_n) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Beweis:

$$\begin{aligned} g_{X_1 + \dots + X_n}(x) &= \prod_{i=1}^n g_{X_i}(x) \quad \text{wegen Unabhängigkeit} \\ &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(x-1)} = e^{(\sum \lambda_i)(x-1)} \end{aligned}$$

(30.) Zentraler Grenzwertsatz

Seien X_n gleichverteilte, unabh. ZV mit $E(X)$, $\text{Var}(X)$.

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

Wir wissen, daß $\left(\frac{1}{n} S_n - E(X)\right) \xrightarrow{D} 0$ deterministische ZV

Multiplizieren mit n^α , so daß

$$n^\alpha \left(\frac{1}{n} S_n - E(X)\right) \xrightarrow{D} 0$$

Wie muß α aussehen:

X_n ZV mit Werten ± 1 mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$.

$$P\left(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0\right) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} > 0$$

$$\leadsto \alpha = 1/2$$

Satz (Zentraler Grenzwertsatz)

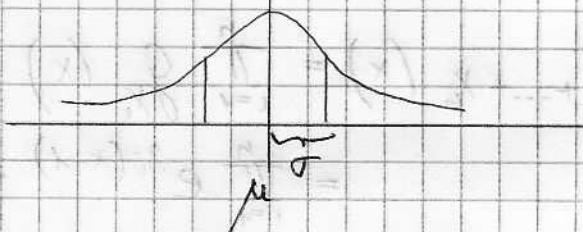
X_i gleichverteilte, unabh. ZV mit $E(X)$, $\text{Var}(X)$.

Dann gilt

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} S_n - E(X) \right) \xrightarrow{D} N_{0, \text{Var}(X)}$$

dabei ist N_{μ, σ^2} Normalverteilung mit Dichte

$$g(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{Gaußverteilung}$$



Beweis:

Wir geben einen 'Beweis' unter der Annahme, daß $M_X(\theta)$ existiert.

$$Z_n = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{n} S_n - E(X) \right) = \frac{S_n}{\sqrt{n}} - E(X) \sqrt{n}$$

$$M_{Z_n}(\theta) = M_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\theta}{\sqrt{n}} \right) \cdot e^{-E(X) \sqrt{n} \cdot \theta}$$

$$= \left(M_X \left(\frac{\theta}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \cdot e^{-E(X) \sqrt{n} \cdot \theta}$$

$$= \exp \left(n \left\{ \ln M_X \left(\frac{\theta}{\sqrt{n}} \right) - E(X) \theta \sqrt{n} \right\} \right)$$

$$\text{Setze } \varepsilon_n = \frac{\theta}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}\psi_n(\theta) &= n \left\{ \ln \mu_x(\varepsilon_n) - E(X) \varepsilon_n \right\} \\ &= \theta^2 \left\{ \frac{\ln \mu_x(\varepsilon_n) - E(X) \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \right\}\end{aligned}$$

$$\text{und } \mu_{Z_n}(\theta) = \exp(\psi_n(\theta))$$

$$\text{Mit } n \rightarrow \infty : \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\lim \psi_n(\theta) = \theta^2 \frac{\ln \mu_x(\varepsilon_n) - E(X) \cdot \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}$$

$$\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \theta^2 \frac{\frac{\mu'_x(\varepsilon_n)}{\mu_x(\varepsilon_n)} - E(X)}{2\varepsilon_n}$$

$$\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \theta^2 \lim \frac{\mu_x(\varepsilon_n) \mu_x''(\varepsilon_n) - (\mu_x'(\varepsilon_n))^2}{2 \mu_x(\varepsilon_n)^2}$$

$$= \theta^2 \frac{E(X^2) - E(X)^2}{2} = \theta^2 \frac{\text{Var}(X)}{2}$$

$$N_{0, \text{Var}(X)} \quad g(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X)$$

$$\mu_n(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x - \text{Var}(X)\theta)^2}{2 \text{Var}(X)}} dx \cdot \frac{\text{Var}(X)^2 \cdot \theta^2}{2 \text{Var}(X)} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=1} = \theta^2 \frac{\text{Var}(X)}{2}\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt

$$\mu_{Z_n}(\theta) \longrightarrow \mu_{N_{0, \text{Var}(X)}} \implies Z_n \longrightarrow N_{0, \text{Var}(X)}$$

$$\frac{d}{dx} = 3 \cdot 9930$$

$$\frac{d}{dx} (x^3 - 2x^2 + 5x - 7) = 3x^2 - 4x + 5$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

(31) Beispiel

 X_i Zufallsverteilung

$$X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1/2$$

$$E(X) = 1/2$$

$$\text{Var}(X) = (1 - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n \text{ Binomialverteilung } B_{n, 1/2}$$

$$E(S_n) = n \cdot E(X) = n/2$$

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X) = n/4$$

$$S_n - n/2 \sim \sqrt{n} \cdot N(0, 1/4)$$

$$\text{Standardabweichung } \sqrt{\text{Var}(S_n)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

$$E(|S_n - n/2|) \approx E(|N|), \text{ wobei } N \sim N(0, \underbrace{n/4}_{\text{Var}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2\text{Var}}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi \text{Var}}} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\text{Var}}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi \text{Var}}} (\text{Var}) \cdot e^{-\frac{x^2}{2\text{Var}}} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\text{Var}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{n}$$

Welches Experiment echt, welches Münzexperiment Fake?

$$X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ an der } i\text{-ten Stelle}$$

$$Z_{r,i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i = X_{i+1} = \dots = X_{i+r-1} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Z_r = \sum_{i=1}^{n-r+1} Z_{r,i} \quad \text{Anzahl der } //1/$$

$$E(Z_{r,i}) = \left(\frac{1}{2}\right)^r$$

$$E\left(\sum X_i\right) = E(Z_1) = n \cdot E(X) = \frac{n}{2}$$

$$E(Z_r) = (n-r+1) \left(\frac{1}{2}\right)^r$$

§ 39 Statistik

Bsp: Maschine produziert Teile, Ausschussanteil = p .
Wir kennen p nicht.

Für Lieferung droht eine Strafe, wenn Anteil $p \geq p_0$.
Stichprobe von n Teilen, zähle Anzahl K
von Ausschussstücken

$$\frac{K}{n} = \text{relativer Anteil}$$

$X_1, \dots, X_n$ gleichverteilte ZV, $E(X_i) = p$

$$\frac{1}{n} \sum X_i = \bar{X} \quad E(\bar{X}) = p$$

Zwei Hypothesen:

$$H_0: p \leq p_0$$

$$H_1: p > p_0$$

Wir wollen uns zwischen H_0 und H_1 aufsteigend der
Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$, bzw. $\bar{X}$ entscheiden.

Entscheidung \ H_0	wahr	falsch
H_0	Ok	Fehler 2-Art
H_1	Fehler 1-Art	Ok

Im Beispiel:

Entscheidung für H_0 , obwohl H_0 falsch ist teuer.

Entscheidung für H_1 , obwohl H_0 richtig nicht so teuer.

Für unsere Entscheidung:

Prozedur sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{K}{n} = \bar{X} > c \leadsto H_1 \quad p(X \leq c | p > p_0) \text{ wird minimiert}$$

$$\frac{K}{n} = \bar{X} \leq c \leadsto H_0 \quad p(\bar{X} > c | p \leq p_0) \leq \begin{matrix} 0.05 \\ \text{bzw. } 0.01 \end{matrix}$$

Wir wählen deshalb

$$c = p_0 + 2\sqrt{n} \cdot \text{Var}(X)$$

$$c = p_0 + 3\sqrt{n} \cdot \text{Var}(X)$$

② Aufgabenstellung

Wir wissen: X ist eine normalverteilte Größe $N(\mu, \sigma^2)$.

Wir kennen μ und σ nicht.

Wir nehmen Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ und schätzen μ und σ .

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{Schätzer für } \mu$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{Schätzer für } \sigma^2$$

③ Definition: (konsistent)

Sei X ZV, die von Parameter α abhängt.

$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Schätzer für α

(Praktisch Stichproben $X_1, \dots, X_n$)

$h(X_1, \dots, X_n) = \text{geschätztes } \alpha$

heißt konsistent $E(h(X_1, \dots, X_n)) = \alpha$,

Wenn $X_1, \dots, X_n$ unabhängig.

Zufallsverteilung mit Parameter α .

Bsp.: $h(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum X_i$

$$E(h(X_1, \dots, X_n)) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i) = E(X)$$

$\Rightarrow$ Stichprobenmittel ist ein konsistenter Schätzer für den Erwartungswert.

$$E\left(\left(\sum_{k=1}^n X_k - n\bar{X}\right)^2\right) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k^2 - \underbrace{2 \sum_{k=1}^n X_k \bar{X}}_{2 \sum_{k=1}^n X_k \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} + n\bar{X}^2\right)$$

$$= n \cdot E(X^2) - 2 E(X^2) - \frac{2}{n} n(n-1) E(X) \cdot E(X) + 1 E(X^2) + 2 \binom{n}{2} E(X)^2$$

$$(n-1) \text{Var}(X) = (n-2+1) E(X^2) - (n-1) E(X)^2$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ ist}$$

konsistenter Schätzer der Varianz $\text{Var}(X)$.

① Definieren (1 Punkt)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass f eine Funktion ist.

Die Funktion f ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f eine Funktion ist.

Die Funktion f ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

X sei ZV, wir wollen $E(X)$ und $\text{Var}(X)$ schätzen.

Dazu nehmen wir Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ unabhängig.

$X_i \stackrel{\text{ist}}{=} X$

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ Stichprobenmittel

$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ Stichprobenvarianz

④ Satz

$\bar{X}$ und S sind erwartungstreue (= konsistente) Schätzer für $E(X)$ und $\text{Var}(X)$.

⑤ Parametrische Statistik

Sei X eine normalverteilte ZV mit $N(\mu, \sigma^2)$

Wir nehmen Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ für X .

$\bar{X}$ ist Schätzung für μ

Wie gut ist diese Schätzung?

Definition (Konfidenzintervall)

Ein Konfidenzintervall (a_1, a_2) für μ ist ein Intervall, so dass $\mu \in (a_1, a_2)$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = (0.95, 0.99)$ gilt.

Genauer:

Angenommen $\mu \notin (a_1, a_2)$. Dann gilt

$$P(\bar{X} \in (a_1, a_2)) \leq 1 - \gamma = \alpha (= 0.05, \text{ bzw. } 0.01)$$

Ein so bestimmtes Intervall heißt Konfidenzintervall.

Wie bestimmen wir (a_1, a_2) ?

Wir wählen (a_1, a_2) symmetrisch um $\bar{x}$.

2 Fälle:

- μ unbekannt, σ bekannt
- μ und σ unbekannt

⑥ Erster Fall: μ unbekannt, σ bekannt.

Dann gilt $\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$

ebenfalls normalverteilt, $E(\bar{x}) = \mu$, $\text{Var}(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sigma^2$

Wir setzen $u = \bar{x} - \frac{c \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$, $w = \bar{x} + \frac{c \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$

wobei c so bestimmt ist, daß die Masse von $N(0,1)$ im Intervall $[-c, c]$ präzise γ beträgt.

Standardisierte Normalverteilung $N(0,1)$ hat

Dichte $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$



Satz:

Dann gilt

$$P(u \leq \mu \leq w) = \gamma$$

Also (u, w) ist Konfidenzintervall zu γ .

Tabelle für $c(\gamma)$

γ	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995
c	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807

⑦. Beispiel

Stichprobe

1.21	1.24
1.15	1.19
1.18	1.19
1.23	1.20

$n=8$

Bekannt ist $\sigma = 0.03$

$$\bar{x} = 1.1975$$

$\gamma = 0.95$ Konfidenzintervall
 $[1.176, 1.218]$

Beweis:

Wir setzen $y = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{x} - \mu)$

y ist standardisiert normalverteilte ZV, $N(0,1)$

$$-c \leq y \leq c \Leftrightarrow -c \leq -y \leq c$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} - \frac{\sigma c}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$$

Also $\gamma = P(-c \leq y \leq c) = P(u \leq \mu \leq w)$ ■

⑧. Zweiter Fall: μ und σ unbekannt

X ist $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt. Wir suchen Konfidenzintervall für μ .

Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ unabhängig

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

$$s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \sqrt{s} \text{ Schätzung für } \sigma.$$

Aussatz: $u = \bar{x} - \frac{c \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{n}}, w = \bar{x} + \frac{c \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{n}}$

Wir bestimmen c geeignet zum gewünschten γ .
Wie wählen wir c ?

Betrachte neue ZV

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{s}} (\bar{x} - \mu)$$

⑨ Satz

Z ist t_{n-1} -verteilt (t verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden),
d.h. hat Dichte

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}}_{\text{konstant, durch } \int_{-\infty}^{\infty} g(z) dz = 1 \text{ bestimmt}} \left(1 + \frac{z^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = g(z)$$

Bemerkung: $\Gamma(x)$ für $x > 0$

ist durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ bestimmt.}$$

(Gammafunktion)

Es gilt $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ für $x > 0$, $\Gamma(1) = 1$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

Also Γ interpoliert $n+1 \rightarrow n!$ oder $n \mapsto (n+1)!$

Im Beispiel oben:

c für t_7 und $\gamma = 0.95$ gibt $c = 2.365$

Konfidenzintervall für μ zu den Daten ist
 $(1.196, 1.218)$ obwohl $\sqrt{s} < \sigma$!

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{s}} (\bar{x} - \mu)$$

$$t_{n-1} \text{ verteilt, Dichte } g(z) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \left(1 + \frac{z^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Konstante
 bestimmt durch $\int_{-\infty}^{\infty} g(z) dz$

Beweis des Satzes

Wir setzen $y = \frac{1}{\sigma} (x - \mu)$ $N(0,1)$ -verteilt.

$$y_i = \frac{1}{\sigma} (x_i - \mu)$$

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$y_1, y_2, \dots, y_n$ sind unabhängig und haben
 gemeinsame Dichtebeschreibung

$$P(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \iiint_A e^{-\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{2}} dy_1 \dots dy_n$$

Wir wählen Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ mit

$$a_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right); a_1, \dots, a_n$$

$$T_0 = a_0 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad T_i = a_i \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$T_0, \dots, T_{n-1}$ ebenfalls unabh., $N(0,1)$ -verteilte ZV

mit gemeinsamer Dichte $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_i^2}{2}} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_i^2}{2}}\right)$

In diesen Koordinaten gilt

$$z = \frac{t_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2}}$$

Dichte von z ?

Neue Koordinaten:

$$(t_0, \dots, t_{n-1}) = F(z, t_1, \dots, t_{n-1})$$

$$= (z \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2}, t_1, \dots, t_{n-1})$$

$$JF = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2} & * & * \\ 0 & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Transformations-
formel

$\Rightarrow$

$$\iint_A e^{-(t_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2)/2} dt_0 \dots dt_{n-1}$$

$$= \iint_{f^{-1}(A)} e^{-(\frac{z^2}{n-1} + 1) \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 / 2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2} dz dt_1 \dots dt_{n-1}$$

Weitere Kugelkoordinaten $r = \sqrt{t_i^2}$

$$P(a \leq z \leq b) = \int_a^b \int_0^\infty \int_{\text{Winkel}} e^{-(1 + \frac{z^2}{n-1}) \cdot \frac{r^2}{2}} \frac{r}{\sqrt{n-1}} h(\varphi's) r^{n-2} dr d\varphi's dz$$

$$= \int_a^b \int_0^\infty e^{-(1 + \frac{z^2}{n-1}) \cdot \frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr dz$$

$$= \int_a^b \left(1 + \frac{z^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dz$$

$\Rightarrow$ Behauptung

10. Tests bei Normalverteilungsannahmen

X sei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt

Wir wollen die Hypothese

$H_0: \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \mu \neq \mu_0$ testen

mit Irrtumswahrscheinlichkeit für Fehler erster Art

H_0 wird abgelehnt, obwohl wahr.

$\leq \alpha$ ($\alpha = 0.05, \alpha = 0.01$)

Wir nehmen eine Stichprobe $X_1, \dots, X_n$.

Methode: Wir betrachten

$$a = \mu_0 - \frac{c \cdot \sigma_1}{\sqrt{n}}, \quad w = \mu_0 + \frac{c \cdot \sigma_1}{\sqrt{n}}$$

wobei 2 Fälle auftreten

$$\sigma_1 = \sigma$$

falls Streuung σ^2 bekannt

$$\sigma_1 = \sqrt{s}$$

Stichprobenstreuung

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

falls σ^2 unbekannt

Wir nehmen die Hypothese H_0 ab, falls $\bar{x} \notin [a, w]$
falls $|\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_1}| > c$.

wobei c das $\frac{1}{2}$ -Fraktile der

a) $N(0,1)$ -Verteilung, wenn $\sigma_1 = \sigma$ bekannt

b) t_{n-1} -Verteilung, wenn σ unbekannt

ist.

11. Einseitiger Test (Gleiche Voraussetzung wie 10)

$H_0: \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \mu > \mu_0$

Wir lehnen H_0 ab mit Irrtum $\leq \alpha$,

wenn $\sqrt{n} \frac{(X - \mu_0)}{\sigma_1} > c$.

wobei c das α -Fraktile von $N(0,1)$ bzw. t_{n-1} ist.

12. Test für die Varianz

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt

$H_0: \sigma = \sigma_0$ gegen $H_1: \sigma > \sigma_0$

Stichprobe $X_1, \dots, X_n$

Wir bilden Testgröße

$$Z = \frac{S}{\sigma_0^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$$

Wir lehnen H_0 mit Irrtumswahrscheinlichkeit α ab, falls $Z > c$, wobei c das α -Fraktile der χ_{n-1}^2 -Verteilung ist.

Dabei ist die Dichte von χ_n^2 auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\text{const } y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

Zum Beweis benötigen wir ein Lemma:

13. Lemma

$U_1, \dots, U_n$ seien unabhängig, $N(0,1)$ -verteilt.

$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^n U_i^2$ ist χ_n^2 -verteilt.

Beweis für die Korrektheit des Tests mit dem Lemma:

Wenn H_0 zutrifft, dann

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 \quad \sum_{i=1}^n \underbrace{((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu))^2}_{\sigma_0^2}$$

$\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \text{ ist } \mathcal{N}(0,1)\text{-verteilt.}$

Ein Summand erfüllt analog wie beim
t-Konfidenzintervall.

Lemma gibt die Behauptung

Beweis des Lemmas:

$u_1, \dots, u_n$ gemeinsame Dichte

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\sum \frac{u_i^2}{2}} du_1 \dots du_n$$

$$Y = \sum_{i=1}^n u_i^2, \quad u_i = \sqrt{y} f_i(\varphi\text{'s})$$

$$T = \mathbb{R}_{\neq 0} \times [\text{Winkelintervalle}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(y, \varphi) \mapsto \sqrt{y} f_i(\varphi\text{'s})$$

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y}} f_1(\varphi\text{'s}) & \sqrt{y} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} f_n(\varphi\text{'s}) & \sqrt{y} \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$|\det DF| = \frac{1}{\sqrt{y}} (\sqrt{y})^{n-1} g(\varphi\text{'s})$$

Dichte geht über in $\text{const} \cdot e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} dy$ d.p.'s

Integration der p.'s liefert die Dichte

$$\text{const} \cdot y^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

Damit ist das Lemma bis auf die Angabe der Konstanten bewiesen.

14. χ^2 -Verteilungstest

Sei X ZV mit endlich vielen Werten $\{1, \dots, k\}$; $p_1, \dots, p_k$

$H_0: (X=i) = p_i$ soll getestet werden. vorgegebene Verteilung

Wir nehmen unabhängige Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ für X
und setzen $Z_i = \# \{j \mid x_j = i\}$

Ist H_0 wahr, dann ist Z_i B_{n, p_i} -verteilt

$$E(Z_i) = n \cdot p_i, \quad \text{Var}(Z_i) = n \cdot p_i (1 - p_i)$$

Wir bilden eine Testgröße $y = \sum_{i=1}^k \frac{(Z_i - n p_i)^2}{n p_i}$

Behauptung: Für genügend große n , wenigstens $n \cdot p_i \geq 5 \forall i$, ist y annähernd χ_{k-1}^2 -verteilt.

Test von H_0 mit Irrtum α :

$c := \alpha$ -Fraktile der χ_{k-1}^2 -Verteilung

Wir lehnen H_0 ab, wenn $y > c$.

15. Beispiel

Test auf fairen Würfeln.

$$H_0: P(X=i) = 1/6, \{1, \dots, 6\}$$

Versuch: 1020 mal Würfeln

Wir erhalten die Werte

$$\{195, 151, 148, 189, 183, 154\}$$

$$n \cdot p_i = 170$$

$$\chi^2 = \frac{(195-170)^2 + \dots}{170} \approx 13,2$$

Für $\alpha = 0,05$ ist $c = 11,07$

" $\alpha = 0,01$ " $c = 15,08$

Ablehnen mit 5%-iger Irrtumswahrscheinlichkeit.

Bemerkung:

Ist H_0 wahr, dann gilt $\frac{Z_i - n \cdot p_i}{\sqrt{n p_i (1-p_i)}}$ ist

annähernd $N(0,1)$ -verteilt.

Schreiben wir

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k (1-p_i) \frac{(Z_i - n p_i)^2}{n p_i (1-p_i)}$$

$\leadsto$ Summe von Quadraten von $k-1$

$\sim N(0,1)$ -verteilten unabh. ZV.

16. χ^2 -Test für Unabhängigkeit

X, Y seien ZV mit Werten $\{0, 1\}$

$\leadsto X$ ist $B_{1,p}$ -verteilt, Y ist $B_{1,q}$ -verteilt.

Frage: Sind X und Y unabhängig?

Wenn ja:

		X	
		0	1
Y	0	pq	$(1-p)q$
	1	$p(1-q)$	$(1-p)(1-q)$

Ziehprobe: $(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$

$$Z_{ij} := \# \{k \mid X_k = i, Y_k = j\}$$

$$Y = \frac{n(Z_{00}Z_{11} - Z_{01}Z_{10})^2}{(Z_{00} + Z_{01})(Z_{01} + Z_{11})(Z_{10} + Z_{11})(Z_{00} + Z_{10})}$$

Y ist χ^2 -verteilt unter der Hypothese H_0 :
 X und Y unabhängig.

Beispiel:

Rauchen und Nichtrauchen unabhängig
vom Geschlecht?

	R	NR	
M	6	39	45
W	1	16	17
	7	55	62

$$Y = 62 \cdot (6 \cdot 16 - 39)^2 / 7 \cdot 55 \cdot 45 \cdot 17 = 0,6839$$

17. Robuste Statistik

X sei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.

Beim Datenerheben hat man Fehler.

Stichprobe ist eine Stichprobe einer ZV

$X_E = X + E$ wobei E ZV, über deren Verteilung wir nichts wissen.

z.B. seltener aber großer Fehler.

Wir wollen μ schätzen.

Bisher $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ Mittelwert berücksichtigt große Ausreißer zu stark.

robuste Version:

Median von $X_1, \dots, X_n$

$$\text{Median}(X_1, \dots, X_n) := \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}} & n \text{ ungerade} \\ \frac{a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}$$

wobei $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ die Werte $X_1, \dots, X_n$ angeordnet sind.



Mathematical Analysis

Chapter 1. Limits and Continuity

1.1. The Concept of a Limit

1.2. The ϵ - δ Definition of a Limit

1.3. Properties of Limits

1.4. Continuity of Functions

1.5. The Intermediate Value Theorem

1.6. The Extreme Value Theorem

1.7. The Weierstrass Approximation Theorem

1.8. The Bolzano-Weierstrass Theorem

1.9. The Heine-Borel Theorem

Chapter 2. Differentiation

2.1. The Derivative

2.2. The Geometric Interpretation of the Derivative

2.3. The Chain Rule

2.4. The Product Rule

2.5. The Quotient Rule

2.6. The L'Hopital's Rule

2.7. The Taylor's Theorem

2.8. The Mean Value Theorem