15.04.08 **§ 1 Jordansche Normalform**

1.1. Erinnerung:

Mit $K^{n\times n}$ bezeichnen wir die Menge der $n\times n$-Matrizen $A=(a_{ij})$ mit Einträgen $a_{ij}\in K$.

$GL(n,K)=\{A\in K^{n\times n}\mid \det A\neq 0\}$

die Gruppe der invertierbaren Matrizen.

$GL(n,K)$ operiert auf $K^{n\times n}$ durch Konjugation

$$\begin{aligned} GL(n,K)\times K^{n\times n} &\longrightarrow K^{n\times n}\\ (S,\ A) &\longmapsto SAS^{-1}\end{aligned}$$

Die <u>Konjugationsklasse</u> von A ist die Bahn von A unter dieser Operation. Matrizen in dieser Bahn, also B mit

$$B=SAS^{-1} \text{ mit } S\in GL(n,K)$$

heißen konjugiert zu A.

Im letzten Semester hatten wir ein Kriterium gegeben, welches klärt, wann A zu einer Diagonalmatrix $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ $=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ konjugiert ist.

1.2. Satz (Diagonalisierbarkeitskriterium)

Sei $A\in K^{n\times n}$. Dann ist A über K diagonalisierbar, d.h. $\exists\, S\in GL(n,K)$, so dass $SAS^{-1}=D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

genau dann, wenn

1) $\chi_A(t)=\det(A-tE)\in K[t]$ in Linearfaktoren zerfällt

und

2) $\dim \operatorname{Eig}(A,\lambda)=m(\chi_A(t),\lambda)\ \forall \lambda\in K$.

Die erste Bedingung lässt sich durch den Übergang von K zu einem Oberkörper immer erreichen:

1.3. Definition:

Ein Körper L heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht konstante Polynom $p(t)\in L[t]$ wenigstens eine

Nullstelle $\lambda \in L$ hat.
Äquivalent, wenn jedes Polynom vom Grad ≥ 1 in Linearfaktoren faktorisiert

$$p(t) = c \cdot \prod_{i=1}^{r} (t-\lambda_i)^{m_i}$$

__Beispiel__

1) $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen (Funktionentheorie)
2) K beliebiger Körper. Dann existiert ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper $\overline{K} \supset K$. (Algebra)

In den Anwendungen in Natur und Technik ist der Fall $\mathbb{C}$ wichtiger.
Die zweite Bedingung lässt sich nicht erzwingen.

__Beispiel__

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & x \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen

auf der Diagonalen. Dann gilt $\chi_A(t) = (-1)^n t^n$.
Also $m(\chi_A(t), 0) = n$. Aber

$$\mathrm{Eig}(A,0) = \ker(A) \subsetneq K^n \text{ außer } A = 0$$

Also für $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & x \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ gilt $\dim \mathrm{Eig}(A,0) < m(\chi_A(t), 0)$

Die Normalform für Matrizen $A \in K^{n \times n}$ für K algebraisch abgeschlossen ist die Jordansche Normalform.

__1.4. Definition:__

Die $r \times r$-Matrix

$$J(\lambda, r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

nennen wir eine Jordankästchen Matrix zum Eigenwert λ der Größe $r \times r$.

Beispiel:

$$\mathcal{J}(\lambda,1) = (\lambda)$$

$$\mathcal{J}(\lambda,2) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}(\lambda,3) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\dim \mathrm{Eig}(\mathcal{J}(\lambda,r),\lambda) = 1$; $\chi_{\mathcal{J}(\lambda,r)}(t) = (-1)^r (t-\lambda)^r$

1.5. Satz (Jordansche Normalform)

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(t)$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Dann existiert eine Matrix $S \in GL(n,K)$ so dass

$$SAS^{-1} = \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{J}(\lambda_1,r_1)} & & & 0 \\ & \boxed{\mathcal{J}(\lambda_2,r_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\mathcal{J}(\lambda_k,r_k)} \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalgestalt hat, mit Jordankästchen $\mathcal{J}(\lambda_i,r_i)$ zu den nicht notwendig verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ in der Diagonalen.

Bis auf Reihenfolge der Blöcke ist $\mathcal{J}$ durch A eindeutig bestimmt.

Der Beweis des Satzes wird einige Zeit brauchen.

Wir beweisen den Satz in zwei Etappen

__1. Schritt:__ Zerlegung in Haupträume

__2. Schritt:__ Klassifikation von nilpotenten Matrizen

1.6. Definition

Eine Matrix $N \in K^{n\times n}$ heißt __nilpotent__, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $N^k = 0$. Das kleinste solche k heißt Nilpotenzindex von N.

1.7. Beispiele:

1) Die Matrix $N = J(0,n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ ist nilpotent

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} ; \quad N^k = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{k} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} k \end{pmatrix}$$

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} , \quad N^n = 0$$

Der Nilpotenzindex ist n.

2) Allgemeiner $N = (n_{ij}) \in K^{n \times n}$ mit $n_{ij} = 0$ für $i \leq j$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist N nilpotent mit Nilpotenzindex $\leq n$.

3) Ist N nilpotent und $S \in GL(n,K)$, dann ist auch $A = SNS^{-1}$ nilpotent, denn

$$A^k = (SNS^{-1})(SNS^{-1})\ldots(SNS^{-1}) = SN^kS^{-1}$$

4)
$$N = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -12 & -18 \\ 6 & 12 & 11 & 17 \\ 4 & 8 & 8 & 12 \\ -5 & -10 & -9 & -14 \end{pmatrix} \text{ ist nilpotent}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 12 \\ -5 & -10 & -5 & -10 \\ -4 & -8 & -4 & -8 \\ 4 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix} ; \quad N^3 = 0$$

1.8. Satz

Sei V ein K-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$ also eine lineare Abbildung $f: V \to V$.

(zum Beispiel: $V = K^n$, $f = L_E^E(A): K^n \xrightarrow{A} K^n$)

zu $\lambda \in K$ ist

$$\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \ker(f - \lambda\, id_V) \quad (= \ker(A - \lambda E_n))$$
$$= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

1.9. Definition

$f \in End(V)$, $\lambda \in K$. Dann heißt

$$Hau(f,\lambda) = \bigcup_{s=1}^{\infty} ker((f-\lambda id_V)^s) \subset V$$

der Hauptraum von f zu λ.

Bemerkung:

1) Ist λ kein EW von f, dann ist $Hau(f,\lambda) = 0$, denn $f-\lambda id_V$ ist ein Isomorphismus und ebenso alle Potenzen $(f-\lambda id_V)^s$

2) Da die Kerne eine Kette von Unterräumen bilden

$$ker(f-\lambda id_V) \subset ker((f-\lambda id_V)^2) \subset \ldots \subset ker(f-\lambda id_V)^s \subset \ldots$$

ist $Hau(f,\lambda)$ stets ein UVR von V.