

§ 10 Mächtigkeit von Mengen

10.1. Definition

Zwei Mengen M, N heißen gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $f: M \rightarrow N$ gibt.

In diesem Fall schreiben wir:

$$|M| = |N|$$

Für endliche Mengen ist $|M|$ die Anzahl der Elemente.
Für unendliche Mengen verfeinern wir so die Notation
 $|M| = \infty$.

Eine unendliche Menge M heißt abzählbar unendlich,
wenn $|M| = |\mathbb{N}|$

andernfalls heißt sie abzählbar z.B. $|\mathbb{R}| + |\mathbb{N}|$.

Bzgl. Mächtigkeit gibt es unendlich viele Typen von Mengen also sehr sehr große.

Dies folgt aus:

10.2. Satz:

Eine Menge M und ihre Potenzmenge 2^M sind nicht gleichmächtig!

Beweis:

Angenommen $f: M \rightarrow 2^M$ ist eine Bijektion.
Betrachte

$$A = \{x \in M \mid x \notin f(x)\} \in 2^M$$

und $a \in M$ mit $f(a) = A$. Dann gilt:

$$a \in A = f(a) \Rightarrow a \notin A$$

$$a \notin A = f(a) \Rightarrow a \in A$$

Also weder $a \in A$ noch $a \notin A$ kann gelten, Widerspruch,
 f gibt es nicht.

Bzgl. Mächtigkeit lassen sich Mengen stets vergleichen.

10.3. Definition

Seien M, N Mengen, $|M| \geq |N|$, M ist mächtiger als N , wenn
es eine Injektion $f: N \hookrightarrow M$ gibt.

10.6. Satz

- a) Für je zwei Mengen M, N gilt
 $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$.
- b) Gilt $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$, dann gilt $|M| = |N|$

Beweis:

- a) Wir verwenden das Zornsche Lemma

Sei $\mathcal{M} = \{ (A, f) \mid A \subset M, f: A \rightarrow N \text{ injektive Abb.} \}$

$\mathcal{M}$ ist partiell geordnet

$$(A, f) \leq (B, g) \text{ falls } A \subset B, g|_A = f.$$

Sei $K \subset \mathcal{M}$ eine Kette. Dann ist

$$B = \bigcup_{(A, f) \in K} A \text{ mit } g: B \rightarrow N,$$

definiert durch $g(x) = f(x)$ falls $x \in A$ wohndefiniert und injektiv.

(B, g) ist obere Schranke der Kette.

Sei (C, h) ein maximales Element.

Zwei Fälle sind denkbar.

- i) $C = M$, dann ist $h: M \rightarrow N$ injektiv.
- ii) $C \subsetneq M$, dann ist $h: C \rightarrow N$ surjektiv, denn andernfalls wäre mit $x_0 \in M \setminus C$ und $y_0 \in N \setminus h(C)$ das Paar $(C \cup \{x_0\}, \hat{h})$ echt größer als (C, h) , wobei
$$\hat{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \in C \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}.$$
 Dies widerspricht der

Maximalität.

Im zweiten Fall ist $h: C \rightarrow N$ surjektiv und injektiv, also bijektiv und die Umkehrabb.

$$h^{-1}: N \rightarrow C \subset M \text{ liefert } |N| \leq |M|.$$

- b) Nach Voraussetzung existieren injektive Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow M$.

Zu zeigen ist, dass es bijektive Abb $k: M \rightarrow N$ gibt.

Sei $x \in M$. Wir betrachten eine endliche oder

unendliche Folge: $x_0 = x \in M, x_1 \in N, x_2 \in M, x_3 \in N, \dots$

von Elementen aus M bzw. N , sodass

$$g(x_1) = x_0, f(x_2) = x_1, g(x_3) = x_2 \text{ usw.}$$

Wegen der Injektivität von f und g ist diese Folge durch x eindeutig bestimmt.

Wir setzen $r(x) = n$, wenn sich die Folge $x_0, x_1, \dots, x_n$ nicht mehr verlängern lässt, d.h. wenn x_n nicht im Bild von f oder g liegt. Lässt sich die Folge beliebig weit fortsetzen, setzen wir:

$$r(x) = \infty.$$

Sei $M_0 = \{x \in M \mid r(x) \text{ ist gerade}\}$

$M_1 = \{x \in M \mid r(x) \text{ ist ungerade}\}$

$M_\infty = \{x \in M \mid r(x) = \infty\}$

Dann ist $M = M_0 \cup M_1 \cup M_\infty$.

Analog definieren wir die Zerlegung

$$N = N_0 \cup N_1 \cup N_\infty$$

Dann gilt: $f(M_1) \subseteq N_0$, $f(M_0) \subseteq N_1$, $f(M_\infty) = N_\infty$

Dann ist $h: M \rightarrow N$ mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M_0 \cup M_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{falls } x \in M_1 \end{cases} \text{ eine Bijektion.}$$

Mächtigkeit lässt sich auch bzgl. Surjektion testen.

10.5. Satz:

Nach Voraussetzung sind alle Mengen $\{f^{-1}(n)\}_{n \in N}$ nicht leer.

Nach dem Auswahlpostulat existiert eine Abbildung

$$g: N \rightarrow M = \bigcup_{n \in N} f^{-1}(n) \text{ mit } g(n) \in f^{-1}(n).$$

g ist injektiv, da $f(g(n)) = n$.

10.6. Satz

Sei M eine unendliche Menge. Dann gilt:

$$|M| = |M \times M|.$$

Beispiel:

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^n|$$

Beweis:

Für abzählbar endliche Mengen, etwa $M = \mathbb{N}$ können wir eine Bijektion

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

explizit angeben.

z.B. $(2,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,2) \leftarrow (0,2) \rightarrow (0,3)$
 $(0,0) \rightarrow (0,1)$

Für beliebige endliche M verwenden wir das Zornsche Lemma.

Sei $M = \{(X, f) \mid X \subset M \text{ und } f: X \rightarrow X \times X \text{ ist eine Bijektion}\}$
 M ist nicht leer, da $|\mathbb{N}| \leq |M|$.

M ist partiell geordnet durch: $(X, f) \leq (Y, g)$, falls $X \subset Y$ und $g|_X = f$.

Jede Kette $K \subset M$ hat eine obere Schranke.

Es gibt also eine obere Schranke $(Z, h) \in M$. Zunächst:

Behauptung:

Es sei $\{Q_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Mengen mit $|Q_i| \leq Z$ mit Indexmenge I mit $|I| \leq Z$.

Dann gilt: $|\bigcup_{i \in I} Q_i| \leq Z$

Beweis:

Nach Voraussetzung existieren surjektive Abbildungen

$$g_i: Z \rightarrow Q_i \quad \forall i \in I \quad \text{und} \quad f: Z \rightarrow I$$

Die Abbildung

$$Z \times Z \rightarrow \bigcup_{i \in I} Q_i$$
$$(z_1, z_2) \mapsto g_{f(z_1)}(z_2)$$

ist ebenfalls surjektiv. Also

$$|\bigcup Q_i| \leq |Z \times Z| = Z.$$

Angenommen $M \neq Z$.

Wir zeigen zunächst, dass $|M|Z \geq Z$ nicht auftritt.

Wäre dies der Fall dann gäbe es $Z_1 \subset M$ mit $|Z_1| = Z$.

Betrachte $\omega = Z \cup Z_1$ und $\omega \times \omega = (Z \times Z) \cup (Z \times Z_1) \cup (Z_1 \times Z) \cup (Z_1 \times Z_1)$

Nach der Behauptung gilt $|\omega| = |Z \cup Z_1| = |Z|$, da $|Z_1| = |Z|$ und

$|I| = 2$. Ebenso $|(Z \times Z_1) \cup (Z_1 \times Z) \cup (Z_1 \times Z_1)| = |Z \times Z| = |Z| = |Z_1|$.

Wählen wir eine Bijektion $g: Z_1 \rightarrow (Z \times Z_1) \cup (Z_1 \times Z) \cup (Z_1 \times Z_1)$

dann ist $\omega = Z \cup Z_1 \rightarrow \omega \times \omega$; $h(x) = \begin{cases} h(x), & x \in Z \\ g(x), & x \in Z_1 \end{cases}$

eine Bijektion, $(Z, h) \not\subseteq (\omega, h)$ was der Maximalität

widerspricht. Also gilt: $|\mu| \leq |Z|$

mit der Behauptung folgt:

$$|\mu| = |(\mu(Z) \cup Z)| = |Z| = |Z \times Z| = |\mu \times \mu|$$

10.7. Korollar:

Sei μ eine endliche Menge, $\{Q_i\}_{i \in I}$ Familie von Mengen mit $|Q_i| \leq |\mu|$ und Indexmenge I mit $|I| \leq |\mu|$. Dann gilt:

$$|\bigcup_{i \in I} Q_i| \leq |\mu|.$$

Beweis:

Für die Behauptung hatten wir nur $|Z \times Z| = |Z|$ verwendet.

10.8. Beispiel:

Abzählbare Mengen von abzählbaren Mengen sind abzählbar.

10.9. Satz:

Sei V ein K -Vektorraum und $\{e_i\}_{i \in I}$ und $\{f_j\}_{j \in J}$ zwei Basen von V . Dann gilt $|I| = |J|$.

Beweis:

Für I oder J endlich haben wir dies im ersten Semester gezeigt.

Also nehmen wir an I und J sind unendlich.

Für jedes $j \in J$ existiert eine endliche Teilmenge $I_j \subseteq I$ und $\lambda_{ji} \in K$, so dass

$$f_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_{ji} e_i$$

Es folgt nach dem Korollar $|\bigcup_{j \in J} I_j| \leq |J|$.

Wir zeigen: $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Angenommen $i_0 \in I \setminus \bigcup_{j \in J} I_j$.

Dann ist e_{i_0} eine endliche Linearkombination der f_j .

und jedes f_i ist eine endliche Linearkombination der e_i mit $i \in I_i \subset \bigcup I_j$. e_{i_0} ist eine Linearkomb. der e_i mit $i \in \bigcup I_j$. Dies widerspricht der linearen Abhängigkeit der $\{e_i\}_{i \in I}$.
Also $|I| \leq |Y|$. $|J| \leq |I|$ zeigt man genauso. ■