22.04.08 **1.13. Corollar**

Sei V ein endl. dim K-VR und $f \in End(V)$ dessen charakteristisches Polynom

$$\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} \cdots (\lambda_k - t)^{r_k}$$

über k in Linearfaktoren zerfällt. Bzgl. geeigneter Basis hat f die Matrixdarstellung

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 E_{r_1} + N_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_k E_{r_k} + N_k} \end{pmatrix}$$

Beweis:

W_i dim $Hau(f, \lambda_i) = m(\chi_f(t), \lambda_i) = r_i$

$(f|_{W_i} - \lambda_i id_{W_i})$ ist nilpotent mit

$(f|_{W_i} - \lambda_i id_{W_i})^{r_i} = 0$

Wählen wir Basen in dem Unterraum W_i, dann bilden diese zusammen eine Basis von V, da $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.

bzgl. dieser hat $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ die angegebene Gestalt, da

$$f(W_i) \subset W_i$$

1.14 Bemerkung

Um nun den Satz über Jordansche Normalform zu zeigen, genügt es Konjugationsklassen von Matrizen der Gestalt $A = (\lambda E + N)$

mit N nilpotent zu studieren.

Da

$$SAS^{-1} = S(\lambda E + N)S^{-1} = \lambda E + SNS^{-1}$$

gilt, reicht es nilpotente Matrizen bis auf Konjugationen zu klassifizieren.

Wir wollen zeigen:

Jede nilpotente Matrix N ist konjugiert zu einer

$$SNS^{-1} = J = \begin{pmatrix} J(0, n_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(0, n_k) \end{pmatrix}$$

$$n = 3 \Rightarrow 0 \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir

$$n_1 \geq \ldots \geq n_k \geq 1 \text{ erreichen}$$

und es gilt $n = n_1 + \ldots + n_k$

1.15 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Partition von n ist eine Zerlegung

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

in Summe mit $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 1$

Beispiel:

$5 = 5$

$5 = 4 + 1$

$5 = 3 + 2$

$5 = 3 + 1 + 1$

$5 = 2 + 2 + 1$

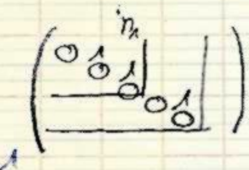
$5 = 2 + 1 + 1 + 1$

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

1.16. Bemerkung:

Um eine Idee für den Beweis zu bekommen betrachten wir die Wirkung der Matrix J auf der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von K^n.

$$Je_1 = 0, \; Je_2 = e_1, \quad , Je_{n_1} = e_{n_1 - 1}$$



$$Je_{n_1+1} = 0, \; Je_{n_1+2} = e_{n_1+1} \cdots \; Je_{n_1+n_2} = e_{n_1+n_2-1}$$

$$Je_{n_1+n_2+1} = 0 \ldots$$

$$\vdots$$

Die Basis können wir also allein aus den Vektoren $e_{n_1}, e_{n_1+n_2}, \ldots, e_{n_1+n_2+\ldots+n_k} = e_n$ und der Wirkung von J konstruieren.

Es gilt also für k solche Vektoren zu finden.

1.7 Satz:

Sei $f \in End(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-VR V mit Nilpotenzindex q.

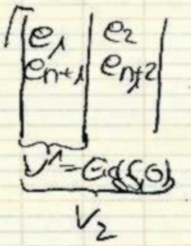
Dann gilt:

1) Die Kerne der Potenzen von f
$$V^p := \ker(f^p)$$
definieren eine f kanonisch zugeordnete Folge
$$0 = V^0 \subset V^1 \subset \ldots \subset V^p \subset V^{p+1} \subset \ldots \subset V^q = V$$
von ineinanderliegenden UVR.

2) $f^{-1}(V^{p-1}) = V^p$, $f(V^p) \subset V^{p-1}$

3) f induziert kanonische Injektionen
$$\bar{f} : V^p/_{V^{p-1}} \longrightarrow V^{p-1}/_{V^{p-2}}$$

Beweis:



1) $v \in V^p \Leftrightarrow f^p(v) = 0 \Rightarrow f^{p+1}(v) = 0$
$$\Leftrightarrow v \in V^{p+1}$$
also liegen die Unterräume wie angegeben ineinander.
$$V^0 = \ker(f^0) = \ker(id_V) = 0$$
$$V^q = \ker(f^q) = \ker(0) = V, \text{ da } f^q = 0,\ f^{q-1} \neq 0$$
$$V^{q-1} \subsetneq V^q$$

2) $v \in V^p \Leftrightarrow f^p(v) = 0 \Leftrightarrow f^{p-1}(f(v)) = 0 \Leftrightarrow f(v) \in V^{p-1}$

Dies zeigt: $f(V^p) \subset V^{p-1}$ und $f^{-1}(V^{p-1}) = V^p$

3) Nach 2) gilt: $f(V^p) \subset V^{p-1}$ und $f(V^{p-1}) \subset V^{p-2}$

Dies zeigt, dass die Abbildung
$$\bar{f} : V^p/_{V^{p-1}} \longrightarrow V^{p-1}/_{V^{p-2}}$$
$$v + V^{p-1} \longmapsto f(v) + V^{p-2}$$
wohldefiniert ist, denn $v + V^{p-1} = w + V^{p-1} \Leftrightarrow v - w \in V^{p-1}$
$$\overset{2)}{\Rightarrow} f(v) - f(w) \in V^{p-2}$$
$$\Rightarrow f(v) + V^{p-2} = f(w) + V^{p-2} \in V^{p-1}/_{V^{p-2}}$$

Die Injektion besagt, dass für $v \in V^p$ mit $f(v) \in V^{p-2}$ schon $v + V^{p-1} = V^{p-1}$ gilt, also $v \in V^{p-1}$. Dies hatten wir

in 2) gezeigt:
$$f^{-1}(V^{p-2}) = V^{p-1}$$

1.18. Corollar

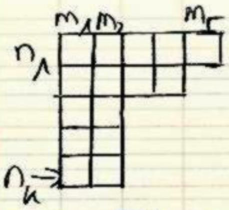
Voraussetzungen und Notation wie im Satz
Dann geben
$$m_i := \dim V^i/V^{i-1} \quad \text{für } i = 1, \dots, q$$
eine f kanonisch zugeordnete Partition von **n**.
Also $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q \geq 1$
und $n = m_1 + \dots + m_q$

Beweis:

Da $V^p/V^{p-1} \hookrightarrow V^{p-1}/V^{p-2}$ gilt $m_{p-1} \geq m_p$ und
$m_q \geq 1$ da $V^{q-1} \subsetneq V^q$ nach Definition des Nilpotenzindex.
Aus der Dimensionsformel
$$\dim V^p = \dim V^{p-1} + \dim V^p/V^{p-1}$$
folgt mit Induktion
$$\dim V^p = m_1 + \dots + m_p .$$
(Bew.: $\dim V^1/V^0 = \dim V^1 = m_1$; $\dim V^{p-1} = m_1 + \dots + m_{p-1}$
$\Rightarrow \dim V^p = m_1 + \dots + m_p$ nach der Dimensionsformel)
Dies ist allerdings nicht die Partition von n, die zu den Jordanblockgrößen gehört. Es ist die duale Partition.

1.19. Definition

Sei $P = (n_1, \dots, n_k)$ eine Partition von n.
Dann ist P^* die duale Partition, die Partition mit
$$P^* = (m_1, \dots, m_r) \text{ mit } r = n_1 \text{ und}$$
$m_j = |\{i \mid n_i \geq j\}| \quad j = 1, \dots, r = n_1$
Das P^* in der Tat eine Partition ist, sieht man am einfachsten, wenn wir die Partition graphisch veranschaulichen.



$(n_1, \ldots, n_k) = (5, 4, 2, 2, 2)$

im Beispiel:

$(m_1, \ldots, m_r) = (5, 5, 2, 2, 1)$

Der Übergang von P zu P^* entspricht der Spiegelung an der Diagonalen.