

$$(n_1, \dots, n_k) = (5, 4, 2, 2, 2)$$

im Beispiel:

$$(m_1, \dots, m_r) = (5, 5, 2, 2, 1)$$

Der Übergang von P zu P^* entspricht der Spiegelung an der Diagonalen.

24.04.08

1.20 Erinnerung

Se $\text{End}(V)$ nilpotentes Endom. $\dim V < \infty$ mit Nilpotenzindex q

$$V^p = \ker(f^p) \quad V^0 = 0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^{q-1} \subsetneq V^q = V$$

$$m_p = \dim V^p / V^{p-1} = \dim V^p - \dim V^{p-1}$$

$$P = (m_1, \dots, m_q) \text{ Partition von } n = \dim V,$$

$$n = m_1 + \dots + m_q, \quad m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q = 1$$

$$m_{p-1} \geq m_p$$

$$V^p / V^{p-1} \xrightarrow{\cong} V^{p-1} / V^{p-2}$$

Duale Partition von $P = (m_1, \dots, m_q)$

$$P^* = (n_1, \dots, n_k) \text{ wobei } n_1 = q.$$

$$n_j = |\{i \mid m_i \geq j\}|, \quad P^{**} = P$$

(Beispiel: siehe oben)

1.21 Satz

Se $\text{End}(V)$, nilpotent, $\dim V = n$ mit Nilpotenzindex q :

und $P = (m_1, \dots, m_q)$ die $\S$ kanonisch zugeordnete Partition

Dann existiert eine Basis $\mathcal{A}$ von V , so dass

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = J = \begin{pmatrix} J(0, m_1) \\ & \ddots \\ & & J(0, m_k) \end{pmatrix}$$

$$J(0, m_i)$$

wobei $(n_1, \dots, n_k)$ die zu P -duale Partition ist.

Beispiel

$$N = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -12 & -18 \\ 6 & 12 & 11 & 17 \\ 4 & 8 & 8 & 12 \\ -5 & -10 & -9 & -14 \end{pmatrix}; \quad N^2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 12 \\ -5 & -10 & -5 & -10 \\ -4 & -8 & -4 & -8 \\ 4 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = 0, \quad S = L_E^E(N) \in \text{End}(\mathbb{Q}^4)$$

$$0 = V^0 \subset V^1 = \ker(N)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -12 & -12 & -18 & 0 \\ 6 & 12 & 11 & 17 & 0 \\ 4 & 8 & 8 & 12 & 0 \\ -5 & -10 & -9 & -14 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 11 & 17 & 0 \\ 4 & 8 & 8 & 12 & 0 \\ -5 & -10 & -9 & -14 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\ker(N) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = L = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$0 = V^0 \subset V^1 = \ker(N) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset V^2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset V^3 = \mathbb{Q}^4$$

$$\dim V^0 = 0 < \dim V^1 = 2 < \dim V^2 = 3 < \dim V^3 = 4 = n$$

$$m_1 = 2 - 0 = 2, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{v_2} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 6 & 1 \\ \hline -5 & 6 & 0 \\ \hline -4 & 4 & 0 \\ \hline -2 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wir wählen $v_3 \in V^3 \setminus V^2$ bzw. alle Repräsentanten einer Basis von V^3/V^2

$$v_2 = Nv_3, \quad v_1 = Nv_2 = N^2v_3, \quad v_4 = \text{wahl} \in V^1 \setminus N(V^2)$$

$$B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad f = L_E^E(N) = \sum \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4, x \mapsto Nx$$

$$M_A^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J = S^{-1}NS$$

wobei $S = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 & -2 \\ -5 & 6 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$ ausrechnen

Probe $S^{-1}NS \stackrel{!}{=} Y$

Beweis von Satz 1.21

Wir wählen eine Basis $v_1, \dots, v_n$ geschickt.

Sei $V^q/V^{q-1} \hookrightarrow V^{q-1}/V^{q-2} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow V^1/V^0$ die zu f zugeordneten Injektionen und

$$m_p = \dim V^p/V^{p-1} = \dim V^p - \dim V^{p-1}$$

$\Phi = (m_1, \dots, m_q)$ die zugehörige Partition von n .

Als erstes wählen wir Vektoren:

$\omega_1^{(q)}, \dots, \omega_{m_q}^{(q)} \in V^q$ welche eine Basis von V^q/V^{q-1} repräsentieren.

Nun betrachten wir die Vektoren

$$\omega_1^{(q-1)} = f(\omega_1^{(q)}), \dots, \omega_{m_q}^{(q-1)} = f(\omega_{m_q}^{(q)}) \in V^{q-1}$$

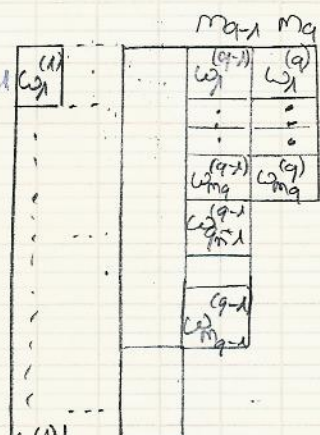
Nach Satz 1.17(iii),

$$V^q/V^{q-1} \hookrightarrow V^{q-1}/V^{q-2}$$

repräsentieren diese Vektoren linear unabhängige Vektoren V^{q-1}/V^{q-2} .

Wir ergänzen diese durch Vektoren

$\omega_{m_q+1}^{(q-1)}, \dots, \omega_{m_{q-1}}^{(q-1)} \in V^{q-1}$ zu einem Repräsentantensystem einer Basis von V^{q-1}/V^{q-2}



Haben wir im i -ten Schritt

$$\omega_1^{(q-i+1)}, \dots, \omega_{m_{q-i+1}}^{(q-i+1)} \in V^{q-i+1}$$

gewählt, dann betrachten wir

$$\omega_1^{(q-i)} = f(\omega_1^{(q-i+1)}), \dots, \omega_{m_{q-i+1}}^{(q-i)} = f(\omega_{m_{q-i+1}}^{(q-i+1)})$$

und ergänzen diese mit Vektoren

$\omega_{m_{q-i+1}+1}^{(q-i)}, \dots, \omega_{m_{q-i}}^{(q-i)} \in V^{q-i}$ zu einem Repräsentantensystem einer Basis von V^{q-i}/V^{q-i-1}

Diese Vektoren sind linear unabhängig

$$\sum_{i,j} \lambda_j^{(i)} \omega_j^{(i)} = 0$$

so müssen, da $\omega_1^{(q)}, \dots, \omega_{m_q}^{(q)}$ eine Basis von V^{q-1}/V^{q-2} bilden, und alle anderen Vektoren schon in V^{q-1} sind, die Koeffizienten $\lambda_1^{(q)}, \dots, \lambda_{m_q}^{(q)}$ alle Null sein.

Also ist die Summe eine Summe von Vektoren in V^{q-1} und die Projektion der Gleichung auf V^{q-1}/V^{q-2} zeigt das alle $\lambda_j^{(q-1)} = 0$ usw.

→ diese Vektoren bilden Basis von V , da $\dim V = n$, und $(m_1, \dots, m_q)$ eine Partition von n bilden.

Wir nummerieren nun diese Basisvektoren wie folgt:

n_1	v_1	v_2	$\dots$	v_{n_1}
n_2	v_{n_1+1}	v_{n_1+2}	$\dots$	$v_{n_1+n_2}$
n_3	$v_{n_1+n_2+1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Bzgl. dieser Basis gilt:

$$M_A^*(f) = \begin{pmatrix} y(0, n_1) \\ \vdots \\ y(0, n_n) \end{pmatrix}$$

dabei ist $l = \dim V^1 = \dim \text{Eig}(f, 0)$.

Zusatz

Ist $V = K^n$ und f durch eine nilpotente Matrix gegeben. Dann ist

$S = (v_1 | \dots | v_n) \in K^{n \times n}$ die Basiswechselmatrix

d.h.

$$J = S^{-1} N S \text{ bzw. } S J S^{-1} = N$$

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{N} & K^n \\ \uparrow S & & \uparrow S \\ K^n & \xrightarrow{f} & K^n \end{array} \Rightarrow J = S^{-1} N S$$