29.04.08 **Satz (Jordansche Normalform)**

$A \in End(K^n) \cong K^{n\times n}$

$\chi_A(t) \in K[t]$ zerfalle in Linearfaktoren

(zum Beispiel ist dies erfüllt, wenn K algebraisch abgeschlossen ist).

Dann existiert eine Matrix $S \in GL(n,K)$, so dass

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1, r_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J(\lambda_k, r_k)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} GL(n,K) \times K^{n\times n} &\to K^{n\times n} \\ (S,A) &\mapsto SAS^{-1} \\ (T,(S,A)) &\longmapsto T(SAS^{-1})T^{-1} \\ \| \\ (TS,A) &\longmapsto (TS)A(TS)^{-1} \end{aligned}$$

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$$

Γ $GL(n,K) \times K^{n\times n} \to K^{n\times n}$

$(S,A) \mapsto S^{-1}AS$ keine Operation von Links $\rfloor$

Der Beweis ist erbracht!

1) Zerlegung in Haupträume

2) Klassifikation von nilpotenten Matrizen

Praktische Verfahren

1. Schritt:

Berechnung von $\chi_A(t)$ und die Faktorisierung

$$\chi_A(t) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - t)$$

2. Schritt:

Zerlegung in Haupträume

Für jeden Eigenwert λ berechnen wir die Kerne der Potenzen $V_\lambda^p = ker(A-\lambda E)^p$, $0 = V_\lambda^0 \subset V_\lambda^1 = Eig(A,\lambda) \subset \ldots \subset W_\lambda$

$$W_\lambda = \bigcup_{p=0}^{\infty} V_\lambda^p$$

Probe: $\dim W_\lambda = m(\chi_A(t), \lambda)$. $K^n = W_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus W_{\lambda_k}$

3. Schritt:

Typ der Jordanschen Normalform

Für jeden EW $\lambda = \lambda_i$

$$V_\lambda^0 \subsetneqq V_\lambda^1 \subsetneqq \dots \subsetneqq V_\lambda^q$$

$$m_\lambda^p = \dim V_\lambda^p / V_\lambda^{p-1} = \dim V_\lambda^p - \dim V_\lambda^{p-1}$$

$P_\lambda = (m^1(\lambda), \dots, m_{q(\lambda)}(\lambda))$ duale Partition $P_\lambda^* = (n_1(\lambda), \dots, n_{k(\lambda)}(\lambda))$

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda, n_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J(\lambda, n_{k(\lambda)})} \end{pmatrix}$$

Schließlich

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_r}} \end{pmatrix}$$

<u>4. Schritt:</u>

Will man auch S bestimmen (zum Beispiel um $A^N = S J^N S^{-1}$ explizit auszurechnen) muss man mehr arbeiten: In jedem Hauptraum wählen wir Basen gemäß dem Klassifikationssatz des nilpotenten Endomorphismus

$$f_\lambda = L(A)\big|_{W_\lambda} - \lambda \, id_{W_\lambda}$$

f_λ hat Nilpotenzindex $q(\lambda) = q$

$$V_\lambda^q / V_\lambda^{q-1}$$

Wir ergänzen die Basis von V_λ^{q-1} mit $w_1^{(q)}, \dots, w_{m_q}^{(q)} \in W_\lambda$ zu einer Basis von W_λ.

Anschließend ergänzen wir die Basis V_{q-2} und den Vektoren $(A - \lambda E) w_j$ $j = 1, \dots, m_q$

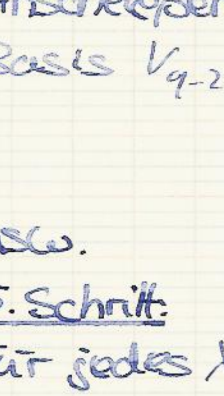
$w_j^{(q-1)} = (A - \lambda E) w_j^{(q)}$ mit Vektoren $w_{m_q+1}^{(q-1)}, \dots, w_{m_{q-1}}^{(q-1)}$

zu einer Basis von V_{q-1}

usw.

<u>5. Schritt:</u>

Für jedes λ haben wir also ein Tableau



von Vektoren gewählt. Diese

$$S_\lambda = (v_1, \dots, v_{\dim W_\lambda}) \in n \times m\,(\chi_A, \lambda)$$

Schließlich
$$S = (S_{\lambda_1} | \ldots | S_{\lambda_e}) \in K^{n\times n}.$$ ■

Beispiel:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} 3-t & 4 & 3 \\ -1 & -t & -1 \\ 1 & 2 & 3-t \end{pmatrix} = (3-t)(-t)(3-t) + 3(-1)\cdot 2 + 4(3-t) + 3t - 4 + 2(3-t)$
$= -t^3 + t^2(3+3) + t(-9-4+3) + (-6+12) - 4 + 2(3-t)$
$= -t^3 + 6t^2 - 12t + 8 = -(t-2)^3$

2. $B = A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker B = \ker\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\dim \mathrm{Eig}(A,2) = 1$

($\Rightarrow \exists$ genau ein Jordanblock)

$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bemerkung:

Allgemein $\dim \mathrm{Eig}(A,\lambda) =$ Anzahl der Jordanblöcke zum EW λ.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B^3 = 0$

$0 \subset \ker B = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset \ker B^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subset \ker B^3 = \mathbb{R}^3$

Partition $(1-0, 2-1, 3-2) = (1,1,1)$ $\quad P^* = (3)$

Ergänzen die Basis von $\ker B^2$ zu Basis von $\mathbb{R}^3$.

z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega_1^{(3)}$

$B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det S = 4$

$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Probe: $S^{-1}AS \stackrel{!}{=} J$

§2 Der Satz von Cayley-Hamilton und das Minimalpolynom

2.1. Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$ und $p \in K[t]$

$$p(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$$

Dann können wir in $p(t)$ die Matrix A einsetzen:

$$p(A) = b_0 E_n + b_1 A + \ldots + b_m A^m \in K^{n \times n}$$

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$p(t) = t^2 - 2t + 3 = 3 - 2t + t^2$

$p(A) = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$p = \chi_A = t^2 - 4t + 1$

$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2. Satz (Cayley-Hamilton)

Sei $A \in K^{n \times n}$, $\chi_A(t) \in K[t]$ das charakteristische Polynom.

Dann gilt: $\chi_A(A) = 0$