$$S=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \det S = 4$$

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe: $S^{-1}AS \overset{!}{=} J$

§2 Der Satz von Cayley-Hamilton und das Minimalpolynom

2.1. Satz

Sei $A \in K^{n\times n}$ und $p \in K[t]$

$$p(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$$

Dann können wir in $p(t)$ die Matrix A einsetzen:

$$p(A) = b_0 E_n + b_1 A + \dots + b_m A^m \in K^{n\times n}$$

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$p(t) = t^2 - 2t + 3 = 3 - 2t + t^2$

$$p(A) = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$p = \chi_A = t^2 - 4t + 1$

$$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. Satz (Cayley-Hamilton)

Sei $A \in K^{n\times n}$, $\chi_A(t) \in K[t]$ das charakteristische Polynom.

Dann gilt: $\chi_A(A) = 0 \in K^{n\times n}$

06.05.08 **Bemerkung:**

1) Der "Beweis"

$$\chi_A(A) = \det(A - A\cdot E) = \det(0) = 0$$

ist schon deshalb falsch, weil $\chi_A(A) \in K^{n\times n}$, während $\det(0) \in K$.

2) Für $f \in End(V)$, $\dim V = \infty$
$\chi_f(t) := \chi_A(t) \in K[t]$, wobei $A = M_*^*(f)$
etwa $\chi_f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + (-1)^n t^n$
Besagt der Satz
$\chi_f(f) = a_0 \, id_V + a_1 f + \ldots + (-1)^n f^n = 0 \in End(V)$.

<u>Beweis des Satzes</u>

Sei $V = K^n$, $f = L_E^E(A)$ die zu A gehörende lineare Abb.
Zunächst führen wir den Beweis unter der zusätzlichen Annahme, dass $\chi_f(t) = \pm(t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$
über K in Linearfaktoren zerfällt.
Dann gilt:
$$\chi_f(f) = \pm(f-\lambda_1)^{r_1} \circ (f-\lambda_2)^{r_2} \circ \ldots \circ (f-\lambda_k)^{r_k}$$
Sei
$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ die Zerlegung der Haupträume von f.
In §1 hatten wir gezeigt:
1) $(f-\lambda_i id_V)(W_i) \subset W_i$
2) $(f-\lambda_i id_V)^{r_i}(W_i) = 0$ (genauer $W_i = \ker((f-\lambda_i id_V)^{r_i})$)
Sei nun
$v = w_1 + \ldots + w_k$ ein beliebiges Element von V.
Dann gilt
$\chi_f(f)(w_i) = 0$, da
$$(f-\lambda_i id_V)^{r_i} \circ (f-\lambda_{i+1} id_V)^{r_{i+1}} \circ \ldots \circ (f-\lambda_k id_V)^{r_k}(w_i)$$
$= (f-\lambda_i id_V)^{r_i}(\tilde{w}_i)$ mit $\tilde{w}_i \in W_i$ nach 1)
$= 0$ nach 2)
Also
$$\chi_f(f)(v) = \chi_f(f)\left(\sum_{i=1}^k w_i\right) = \sum_{i=1}^k \underbrace{\chi_f(f)(w_i)}_{=0} = 0$$
Da $v \in V$ beliebig ist, folgt
$\chi_f(f) = 0 \in End(V)$
Für $K = \mathbb{C}$ ist damit der Beweis erbracht.
Für Unterkörper z.B. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gilt die Aussage auch, da etwa für $A \in \mathbb{Q}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$

$\chi_A(A) \in \mathbb{Q}^{n\times n} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ die Nullmatrix ist.

Im Folgenden werden wir einen zweiten Beweis führen, der den Fundamentalsatz der Algebra nicht verwendet.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, $\dim V = n < \infty$

zu zeigen ist: $\chi_f(f)(v) = 0 \quad \forall v \in V$

Für $v = 0$ ist dies klar.

Andernfalls betrachten wir die Folge der Vektoren

$$v, f^1(v), f^2(v), \ldots, f^k(v), \ldots$$

Da der VR V endlich dimensional ist, gibt es ein kleinstes $p \geq 1$, so dass

$$v_1 = v, v_2 = f(v), \ldots, v_p = f^{p-1}(v) \text{ linear unabhängig sind}$$

aber $f^p(v)$ von $v_1, \ldots, v_p$ linear abhängig ist.

Etwa

$$f^p(v) = c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p \quad \text{mit } c_i \in K.$$

Wir ergänzen $v_1, \ldots, v_p$ zu einer Basis $\mathcal{A} = v_1, \ldots, v_n$ von V

bzgl. dieser Basis hat f die Matrixdarstellung

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & & c_1 & \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 1 & & \vdots & * \\ & & \ddots & & \\ 0 & & 1 & c_p & \\ \hline & & 0 & & D \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} p \\ \}\, n-p \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{p} \quad \underbrace{\quad}_{n-p}$$

Dann gilt:

$$\chi_f(t) = \det(A - tE_n) = \det(D - tE_{n-p}) \cdot \det(C - tE_p)$$

nach dem Kästchensatz

$$\det(C - tE_p) = \det\begin{pmatrix} -t & & & c_1 \\ 1 & -t & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & c_{p-1} \\ & & 1 & c_p - t \end{pmatrix} = (-1)^p (t^p - c_p t^{p-1} - \ldots - c_2 t - c_1)$$

(Induktion!
Entwicklung
nach der letzten Sp.)

Also folgt $\chi_C(f)(v) = (-1)^p (f^p(v) - c_p f^{p-1}(v) - \ldots - c_2 f(v) - c_1 v)$

$$= (-1)^p (f^p(v) - (c_p v_p + \ldots + c_1 v_1)) = 0$$

$$\Rightarrow \chi_f(f)(v) = \chi_D(f)(\chi_C(f)(v)) = \chi_D(f)(0) = 0 \,. \blacksquare$$

Im Satz von Cayley-Hamilton hatten wir A in das Polynom $\chi_A(t)$ eingesetzt. Wir studieren die Substitutionshomomorphismen

$$\varphi_A : K[t] \to K^{n\times n},\ p(t) \mapsto p(A)$$

genauer: φ_A ist ein K-Algebra Homomorphismus.
$\ker \varphi_A \neq 0$, da $\dim_{K\text{-VR}} K[t] = \infty$, aber $\dim K^{n\times n} = n^2 < \infty$
$\chi_A(t) \in \ker \varphi_A$
Welche anderen Polynome liegen im Kern?

__Erinnerung__

R, S Ring $\quad (R,+,\cdot)$, $(R,+)$ abelsche Gruppe

$$\cdot : R\times R \to R, \quad a,b \mapsto a\cdot b$$

- assoziativ, distributivgesetze

$\varphi: R \to S$ Ringhomomorphismus wenn

$$\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$$
$$\varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

Die Kerne von Ringhomomorphismen $\varphi: R\to S$ sind __Ideale__.

Eine Teilmenge $I \subset R$ heißt (beidseitiges) Ideal, wenn $(I,+) \subset (R,+)$ Untergruppe und

$$a,b\in I \Rightarrow a+b \in I$$

und weiter

$$r\in R, a\in I \Rightarrow ra\in I \text{ und } a\cdot r \in I.$$

__Beispiel:__

- $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\quad a\mathbb{Z} = \{na \mid n\in\mathbb{Z}\}$ Ideal
- $\varphi: R\to S$ Ringhomomorphismus, dann ist $\ker\varphi$ ein Ideal. Jedes (beidseitige) Ideal taucht als Kern eines Ringhom. auf nämlich:

I beidseitiges Ideal, dann trägt R/I die Struktur eines Rings $(a+I)(b+I) := a\cdot b + I$

- R Ring, $f_1, \dots, f_n \in R$
  $\langle f_1, \dots, f_r \rangle := \{ g_1 f_1 + \dots + g_r f_r \mid g_i \in R \}$ Ideal in R.

Also $\ker \varphi_A \subset K[t]$ ist ein Ideal.

Satz

Jedes Ideal $I \subset K[t]$ ist ein Hauptideal d.h. ein Ideal das von einem einzigen Element $p \in K[t]$ erzeugt wird.

$$I = \{ gp \mid g \in K[t] \} = \langle p \rangle$$

Beweis

Sei $I \subset K[t]$ ein Ideal. $I = \{0\}$ ist das Hauptideal $\langle 0 \rangle$.
Ist $I \neq 0$. Dann existiert ein Polynom $p \in I$ kleinsten Grades $\neq 0$.
Wir wählen dieses p normiert

$$p(t) = t^d + a_1 t^{d-1} + \dots + a_d$$

Sei $f(t) \in I$ ein weiteres Polynom.
Mit diesem Polynom mit Rest können wir $f(t)$ schreiben als

$$f(t) = q(t) \cdot p(t) + r(t)$$

mit $q(t), r(t) \in K[t]$ und $\deg r(t) < \deg p(t)$

Beispiel:

$p(t) = t^2 - 2$, $f(t) = t^3 + 2t^2 - 1$

$$(t^3 + 2t^2 - 1) : (t^2 - 2) = t + 2$$
$$\begin{array}{l} -(t^3 - 2t) \\ \hline \quad 2t^2 + 2t - 1 \\ \quad -(2t^2 - 4) \\ \hline \quad\quad 2t + 3 \end{array}$$

$$\frac{(t^3 + 2t^2 - 1)}{t^2 - 2} = t + 2 + \frac{2t+3}{t^2-2}$$

Mit $f(t) \in I$ liegt auch

$$r(t) = f(t) - q(t) \cdot p(t) \in I.$$

Nach Wahl von $p(t) \in I$ muss wegen
$\deg r(t) < \deg p(t)$
$r(t) = 0 \in K[t]$, also $f = q \cdot p \in \langle p \rangle$
$\Rightarrow I \langle p \rangle$

<u>Definition</u>
Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\varphi_A : K[t] \to K^{n \times n}$ der Substitutionshom. Dann heißt das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades in $\ker \varphi_A$, das Minimalpolynom von A.
Bezeichnung: p_A das Minimalpolynom von A.
Jedes andere Polynom $q \in \ker \varphi_A$ ist ein Vielfaches von p_A. Da $\chi_A \in \ker \varphi_A$ teilt das Minimalpolynom das charakteristische Polynom.

<u>Beispiel:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

$$A^2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad A^2 - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2(A - E)$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A + E = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 \in \ker \varphi_A$$

Da A, E in $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$ linear unabhängig sind, ist
$p_A(t) = t^2 - 2t + 1$ das Minimalpolynom von A.
$\chi_A(t) = (1-t)^3 = -(t-1)^3$, $p_A(t) = (t-1)^2$ teilt $\chi_A(t)$.