

Nach Wahl von $p(t) \in I$ muss wegen
 $\deg r(t) < \deg p(t)$
 $r(t) = 0 \in K[t]$, dass $f = q \cdot p \in \langle p \rangle$
 $\Rightarrow I \subseteq \langle p \rangle$

Definition

Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\varphi_A: K[t] \rightarrow K^{n \times n}$ der Substitutionshom.
 $f(t) \mapsto f(A)$
 Dann heißt das eindeutig bestimmte normierte Polynom
 kleinsten Grades in $\ker \varphi_A$ das Minimalpolynom
 von A .

Bezeichnung: p_A das Minimalpolynom von A .
 Jedes andere Polynom $q \in \ker \varphi_A$ ist ein Vielfache
 von p_A . Da $\chi_A \in \ker \varphi_A$ teilt das Minimalpolynom
 das charakteristische Polynom.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2(A - E)$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A + E = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 \in \ker \varphi_A$$

Da A, E in $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$ linearunabhngig sind, ist

$p_A(t) = t^2 - 2t + 1$ das Minimalpolynom von A .

$$\chi_A(t) = (1-t)^3 = -(t-1)^3, \quad p_A(t) = (t-1)^2 \text{ teilt } \chi_A(t).$$

08.05.08 Definition

Das Minimalpolynom p_A von A ist das normierte
 Polynom kleinsten Grades in $\ker \varphi_A$.

p_A ist eindeutig bestimmt, da wenn $p_A, \tilde{p}_A$ beide
 die Bedingung erfüllen: $\deg p_A = \deg \tilde{p}_A$
 und somit $p_A - \tilde{p}_A$ kleineren Grad hat.

$p_A - \tilde{p}_A$ lässt sich normieren, da $p_A - \tilde{p}_A \in \ker \varphi_A$

und der Definition des Minimalpolynoms.

$$\Rightarrow p_A - \hat{p}_A = 0 \text{ d.h. } p_A = \hat{p}_A.$$

Satz von Cayley Hamilton und Division mit Rest zeigt, dass χ_A von p_A geteilt wird.

2.4. Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$.

χ_A das charakteristische Polynom,

p_A das Minimalpolynom

Äquivalent sind:

- 1) λ ist eine Nullstelle von p_A
- 2) λ " " " " von χ_A
- 3) λ ist ein Eigenwert von A .

Beweis

1) $\Rightarrow$ 2) da p_A ein Teiler von χ_A ist

$$\chi_A = g \cdot p_A$$

2) $\Rightarrow$ 3) LinAlg I. genügt 3) $\Rightarrow$ 1) zu zeigen:

λ sei EW von A und $v \in K^n$ zugehöriger Eigenvektor.

Wir ergänzen $v=v_1$ zu einer Basis $v_1, v_2, \dots, v_n$ von K^n

Bzgl. dieser Basis wird die lineare Abbildung durch:

$$B = SAS^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \quad (\text{Dabei } S = (v_1, \dots, v_n))$$

$$p_A = p_B = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_0 \quad (\text{Bemerkung})$$

$$B^e = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^e & * \\ \hline 0 & D^e \end{array} \right), \quad p_A(B) = p_B(B) = 0 \in K^{n \times n}$$

$$\Rightarrow \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_0 = 0 \in K$$

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = 0.$$

Bemerkung

Das Minimalpolynom hängt nur von der Konjugationsklasse von A ab: $B = S^{-1}AS$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_A: K[t] & \xrightarrow{\varphi_B} & \text{End}(K^n) \cong K^{n \times n} \\ t & \mapsto & A \mapsto B \\ & & \mu \mapsto S^{-1}\mu S \end{array}$$

$$\Rightarrow \ker \varphi_A = \ker \varphi_B \Rightarrow p_A = p_B$$

2.5. Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix, dessen charakteristisches Polynom χ_A in Linearfaktoren zerfällt und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ seien die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A .

Dann gilt:

$$p_A(t) = \prod_{j=1}^r (t - \lambda_j)^{q_j}$$

wobei q_j der Nilpotenzindex von $(A - \lambda_j \text{id}_{K^n})|_{W_j}$ ist, wobei

$$W_j = \text{Hau}(A, \lambda_j)$$

$q_j =$ Zeilenanzahl des größten Jordanblöschens von A zum EW λ_j .

Beispiele:

$$f_j = \left(j(\lambda_j, k_1^j), \dots, j(\lambda_j, k_{q_j}^j) \right) \quad q_j = \max k_i^j$$

$$M_j = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{9 \times 9}$$

$$\chi_j = (-1)^9 (t-2)^5 (t-3)^4$$

$$p_j = (t-2)^3 (t-3)^2$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & & & & \\ & \boxed{3} & & & \\ & & \boxed{3} & & \\ & & & \boxed{2} & \\ & & & & \boxed{2} & \\ & & & & & \boxed{2} & \\ & & & & & & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = (t-3)^4 \cdot (t-2)^4$$

$$p_A(t) = (t-3)^3 \cdot (t-2)^2$$

Beweis:

$A = J$ sei Jordansche Normalform

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & \\ & \boxed{B_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix} \text{ hat Blockgestalt} \quad \text{ebenso } J^k = \begin{pmatrix} \boxed{B_1^k} & & \\ & \boxed{B_2^k} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{B_k^k} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow p_A$ wird von p_{B_i} geteilt.

Genauer gilt

$$p_A(t) = \text{kgV}(p_{B_1}(t), \dots, p_{B_k}(t))$$

$$B = J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \quad p_B(t) = (t-\lambda)^m$$

$$B - \lambda E_m = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad (B - \lambda E_m)^m = 0$$

$$\text{aber } (B - \lambda E_m)^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow p_{J(\lambda, m)}(t) = (t-\lambda)^m$$

$$\text{kgV}((t-\mu_1)^{m_1}, \dots, (t-\mu_k)^{m_k})$$

$$= \prod_{\lambda \in \Lambda} (t-\lambda)^{\max\{m_i \mid \mu_i = \lambda\}}$$

Bemerkung:

$$\chi: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$A \mapsto (a_{11}, \dots, a_{nn})$$

dabei ist $a_k = \pm k$ -te Koeffizient von χ_A

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_1 (-1)^{n-1} t^{n-1} + \dots - a_{n-1} t + a_n$$

$$a_n = \text{Tr} A = a_{11} + \dots + a_{nn}, \quad a_1 = \det A$$

Ist nun $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}^n$ ein allgemeiner Punkt, genauer ein Punkt, in dem das Polynom

$$(t)^n + \alpha_1 (t)^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

keine mehrfachen Nullstellen hat, dann ist

$\chi^{-1}(\alpha) = \text{Konjugationsklasse der Diagonalmatrix}$
 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die paarweise versch. Nullstellen sind.

Für spezielle Punkte $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ ist $\chi^{-1}(\beta)$ eine Vereinigung von Konjugationsklassen.

Zum Beispiel für $\beta = 0 \in \mathbb{C}^n$

$$\chi^{-1}(0) = \{N \mid N \text{ nilpotent}\} = \bigcup_{P \text{ Partition von } n} \text{Konjugationsklassen von } N(P)$$

$$P = (2) \quad t \neq 0, \quad t = 0 \quad P(1, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t \neq 0$$

$$= \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aber } \lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k[x_{ij}]$ Polynomring in n^2 -Variablen

$$X = (x_{ij})$$

$$\text{Er } X = x_{11} + \dots + x_{nn}, \dots, \det X = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$$

konstant auf den Orbits unter der Konjugationsoperation
 sind. Gibt es weitere Polynome die konstant auf den
 Bahnen sind?

Satz (aus der Invariantentheorie)

Die Polynome in Funktion $\text{tr } X, \dots, \det X$
 sind die einzigen Polynome mit $k[x_{ij}]$ die
 konstant auf den Bahnen sind.

§ 3 Der Dualraum

Sei V ein K -VR, W ein weiterer, dann ist $\text{Hom}(V, W)$ ein K -VR

Beispiele

$$\text{Hom}(K^n, K^m) \cong K^{m \times n}$$

Insbesondere können wir $\text{Hom}(V, K)$ für $W=K$ betrachten

3.1 Definition

$V^* = \text{Hom}(V, K)$ heißt Dualraum von V

Beispiele: Die Elemente von V^* nennt man Linearformen

Für $V = \mathbb{R}[x]$ ist und $a \in \mathbb{R}$

$$ev_a: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(a)$$

ein Element des Dualraums. Ebenso $a < b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

Beispiele:

$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, a < b$$

Dann sind

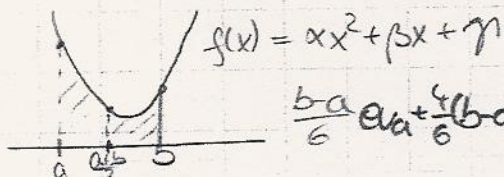
$ev_a, ev_{\frac{a+b}{2}}, ev_b$ und $\int_a^b \in V^*$ linear unabhängig.
 $1, x, x^2$ ist eine Basis von V .

$$ev_a(1) = 1, ev_a(x) = a, ev_a(x^2) = a^2$$

$$ev_b(1) = 1, ev_b(x) = b, ev_b(x^2) = b^2$$

$$ev_{\frac{a+b}{2}}(1) = 1, ev_{\frac{a+b}{2}}(x) = \frac{a+b}{2}, ev_{\frac{a+b}{2}}(x^2) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\int_a^b 1 dx = b-a, \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2), \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$



$$\frac{b-a}{6} ev_a + \frac{4}{6}(b-a) ev_{\frac{a+b}{2}} + \frac{b-a}{6} ev_b = \int_a^b \quad (\text{Simpson-Regel})$$