13.05.08 **3.3. Bemerkung**

Wenn $f: V \to W$ eine lineare Abbildung ist, dann ist:
$f^*: W^* \to V^*$ durch $W^* \ni \varphi \to \varphi \circ f \in V^*$ definiert.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi \circ f"'] & & W \arrow[dl, "\varphi"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

3.4. Definition:

Sei V ein K-VR mit Basis $A = \{v_1, \dots, v_n\}$. Wir definieren Elemente $v_i^* \in V^*$ durch

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Achtung: v_i^* hängt von der gesamten Basis ab, nicht nur von v_i.

$v_i^*(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_i$ ist die Projektion auf die Koordinate λ_i bzgl. unserer Basis A.

3.5. Satz und Definition:

Sei V ein VR mit Basis $A = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann ist $A^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ die Basis von V^*, die sogenannte duale Basis.

Insbesondere gilt: $\dim V = \dim V^*$ im Falle $\dim V < \infty$

Beweis:

Sei $\varphi \in V^*$ eine beliebige Linearform und $\lambda_i = \varphi(v_i)$ der Wert auf dem i-ten Basisvektor. Dann gilt:

$$\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$$

da die Werte auf der Basis $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ übereinstimmen:

$$\lambda_i = \varphi(v_i) \overset{!}{=} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j^*\right)(v_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_i$$

Damit ist

$V^* = \langle v_1^*, \dots, v_n^* \rangle$ gezeigt.

$v_1^*, \dots, v_n^*$ sind linear unabhängig, da

$0 = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$, dann ist $0 = (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i$ ■

3.6. Satz (Matrixbeschreibung der dualen Abbildung)

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb. mit Basen
$\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$.

Sei $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$

Dann gilt: $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = {}^tA$

Beweis:

Wir müssen das Bild von w_k^* unter f^* bzgl. der Basis $v_1^*, \dots, v_n^*$ bestimmen.

$$f^*(w_k^*)(v_i) = w_k^*(f(v_i))$$
$$= w_k^*\left(\sum_{j=1}^n a_{ji} w_j\right) = \sum_{j=1}^n a_{ji} w_k^*(w_j) = a_{ki}$$
$$= a_{ki} v_i^*(v_i) = \left(\sum a_{kj} v_j^*\right)(v_i)$$

Also $f^*(w_k^*) = \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j^*$

$\Rightarrow M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = {}^tA$ ■

$$A \in K^{m \times n} \Rightarrow {}^tA \in K^{n \times m}$$

3.7. Definition

Zu V K-VR, $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der Dualraum heißt
$V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, K)$ der Doppeldualraum

Wir haben die kanonische Abbildung

$$i = i_V : V \to V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, K)$$
$$x \mapsto i_V(x) = i(x) : V^* \to K,\ \varphi \mapsto \varphi(x) \in K.$$
$$i(x)(\varphi) := \varphi(x)$$

3.8. Satz

Ist $\dim V < \infty$, dann ist $i_V : V \to V^{**}$ ein Isomorphismus.

Beweis

Sei $v \in V$ beliebig $\neq 0$. Zur Injektivität von i ist zu zeigen, dass $i(v) \in V^{**}$ nicht null ist.
Dann ergänzen wir v zu einer Basis $v = v_1, \dots, v_n$ von V und betrachten die duale Basis

$v_1^*, \dots, v_n^*$ von V^*.

Es gilt $\quad i(v)(v_1^*) = v_1^*(v) = v_1^*(v_1) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \ker i = \{0\}$.

Da $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$ folgt aus i injektiv:

$i: V \to V^{**}$ ist ein Isomorphismus

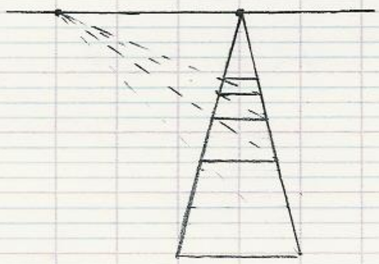
Bemerkung

$V = \mathbb{R}[x]$, $V^* = \mathbb{R}[[x]]$, V^{**} größer als V

§4 Der projektive Raum

4.1. Definition

Zwei parallele Geraden in der Ebene schneiden sich bei einer perspektivischen Zeichnung in einem Punkt des Horizonts.



Vorläufige Definition:

Der Projektive Raum $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H$. ← Horizont

Dann gilt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

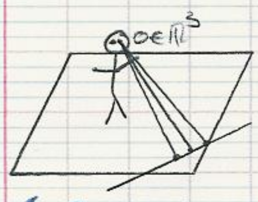
- je zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt.
- zu je zwei Punkten geht genau eine Gerade

Also H ist eine Gerade.

Allgemeine Gerade L = gewöhnliche Gerade + Punkt im Horizont

$= L \cap H$

Korrekte Definition



4.2. Definition

Wir betrachten einen Körper K und den Vektorraum K^{n+1}.

Dann ist

$$\mathbb{P}^n(K) = \{\text{Geraden durch 0-Punkt im } K^{n+1}\}$$
$$= \{1\text{-dim UVR von } K^{n+1}\}$$
$$\mathbb{P}^n(K) = \{\text{UVR von } K^{n+1}\} = (K^{n+1} \setminus \{0\})/_{\sim}$$

wobei $v, w \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ äquivalent sind $v \sim w$

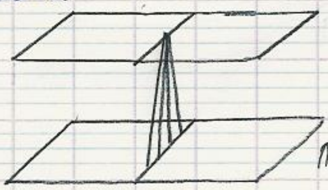
falls $\langle v \rangle = \langle w \rangle \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*: v = \lambda w$

Nochmal anders:

Habe die Gruppenoperation von K^* auf K^{n+1}

$$K^* \times K^{n+1} \to K^{n+1}, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$ eine Bahn ist $\{0\}$.

Die Menge der restlichen Bahnen bildet den projektiven Raum.



$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup (\mathbb{R} \cup \text{Punkt})$

$\mathbb{R}^2 \cup H = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

4.3. Definition (Homogene Koordinaten)

Zu $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ bezeichnet

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = [x] = \langle x \rangle \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

Zu $[x]$ sind die einzelnen Koordinaten x_i nicht bestimmt, aber falls $x_i, x_j \neq 0$ ist $\frac{x_i}{x_j} = x_i : x_j$ eindeutig bestimmt.

$$[(x_0, \dots, x_n)] = [(y_0, \dots, y_n)] \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* \ (x_0, \dots, x_n) = \lambda(y_0, \dots, y_n) = (\lambda y_0, \dots, \lambda y_n).$$

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{\lambda y_i}{\lambda y_j} = \frac{y_i}{y_j}$$

4.4. Die Einbettung $K^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n(K)$

Zu $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ betrachten wir den Punkt

$$(1 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$$

Dies definiert eine Bijektion:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} U_0 = \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n(K) \text{ mit } z_0 \neq 1\}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots x_n)$$

Die Umkehrabbildung

$$\varphi_0 : U_0 \to K^n$$
$$(z_0 : \dots : z_n) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right)$$

Mit dieser Identifikation gilt:

$$\mathbb{P}^n(K) = U_0 \cup \{(z_0, \dots, z_n) \mid z_0 = 0\} \cong K^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(K)$$
$$= K^n \cup K^{n-1} \cup \mathbb{P}^{n-2}(K)$$