

15.05.08

4.5. Definition

$$U_i = \{ (x_0: \dots: x_n) \in \mathbb{P}^n(K) \mid x_i \neq 0 \}$$

$$\varphi_i: U_i \rightarrow K^n$$

$$(x_0: \dots: x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

$\mathcal{A} = \{ (U_i, \varphi_i) \mid i=0, \dots, n \}$ heißt Standardatlas von $\mathbb{P}^n$

Bemerkung:

$\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{P}^n$, da für jeden Punkt $p = (x_0: \dots: x_n)$ wenigstens ein $x_i \neq 0$.

4.6. V beliebiger K -VR. Dann abstrakter:

$$\text{Ist } \mathbb{P}(V) = \{ 1\text{-dim UVR von } V \}$$

Speziell: $V = K^{n+1}$

$$\mathbb{P}(K^{n+1}) = \mathbb{P}^n(K).$$

4.7.

$W \subset V$ Untervektorraum. Dann $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$.

Teilmenge(n) diese Gestalt $\mathbb{P}(W)$ nennt man lineare Unterräume von $\mathbb{P}(V)$.

$$\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1.$$

Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(K)$ sind lineare Unterräume der Codimension 1. Geraden in $\mathbb{P}^n(K)$ sind 1-dim.

lineare Unterräume in $\mathbb{P}^n(K)$.

$$p = (p_0: \dots: p_n) \in \mathbb{P}^n(K), \quad q = (q_0: \dots: q_n)$$

$$\overline{pq} = \{ \lambda p + \mu q : \lambda, \mu \in K, \lambda + \mu = 1 \}$$

Hyperebenen lassen sich durch eine Gleichung beschreiben:

$$H = \{ (x_0: \dots: x_n) \mid a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0 \}$$

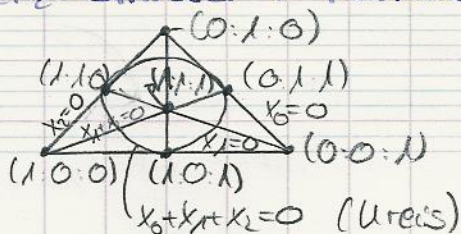
4.8. Beispiel:

Die Fanoebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. $|\mathbb{F}_2^3| = 8$

$$\frac{|\mathbb{F}_2^{n+1} \setminus \{0\}|}{|\mathbb{F}_2^*|} = \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_2) = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$$

Speziell:

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ enthält 7 Punkte



• jede Gerade enthält genau drei Punkte

• durch jeden Punkt gehen genau drei Geraden

4.9. Koordinatentransformation

Definition:

Eine Abbildung $\varphi: \mathbb{P}^n(K) \rightarrow \mathbb{P}^n(K)$

induziert durch eine invertierbare Matrix $A \in GL(n+1, K)$

$$K^{n+1} \xrightarrow{A} K^{n+1}$$

heißt lineare Koordinatentransformation.

4.10. Satz

$\varphi_A = \varphi_B \Leftrightarrow A \cdot (K^{n+1}) = B \cdot (K^{n+1})$ heißt projektive lineare Gruppe. $PG(n, K) = GL(n+1, K) / K^*$

Es seien $p_0, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}^n(K)$, $n+2$ Punkte von denen keine $n+1$ in einer Hyperebene liegen. Dann gibt es genau eine Koordinatentransformation

$$\varphi: \mathbb{P}^n(K) \rightarrow \mathbb{P}^n(K)$$

mit $\varphi(0: \dots: 1: \dots: 0) = p_i \quad i=0, \dots, n$

$$\varphi(1: 1: \dots: 1) = p_{n+1}$$

Beweis

Es seien $v_0, \dots, v_n \in K^{n+1}$ Repräsentanten von $p_0, \dots, p_n$.

$A = (v_0, \dots, v_n) \in GL(n+1, K)$, da $p_0, \dots, p_n$ in keiner Hyperebene enthalten sind.

$$\varphi_A(0: \dots: 1: \dots: 0) \mapsto p_i$$

$$\varphi_A(1: \dots: 1) = \langle v_0 + \dots + v_n \rangle \neq p_{n+1} \text{ im Allgemeinen}$$

Da $v_0, \dots, v_n \in K^{n+1}$ eine Basis bilden, können wir $\langle v_{n+1} \rangle = p_{n+1}$ darstellen als

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$$

kein $\lambda_i = 0$, da sonst $p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n, p_{n+1}$ in einer Hyperebene liegen würden, nämlich in der von

$p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n$ aufgespannten.

Wir betrachten

$$B = (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n) \in GL(n+1, K)$$

Dann gilt: $\varphi_B(0: \dots: 1: \dots: 0) = p_i$, $\varphi_B(1: \dots: 1) = p_{n+1}$

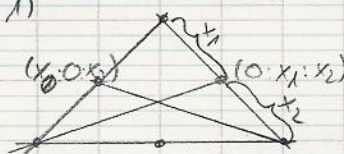
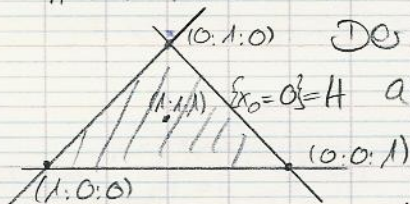
φ_B ist eindeutig bestimmt,

da sich eine andere Wahl von B , sich lediglich um einen Faktor $\lambda \in K^*$ unterscheidet. $\blacksquare$

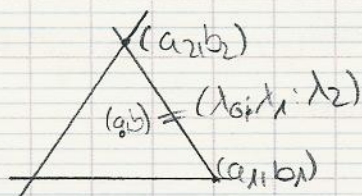
Man nennt die Punkte $(1:0:\dots:0), \dots, (0:\dots:0:1)$ die Koordinatenpunkte und $(1:1:\dots:1)$ den Skalierungspunkt.

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

Der schraffierte Bereich besteht aus allen Punkten $\sum (x_0: x_1: x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) / x_i > 0$



Wir wählen Repräsentanten $(0: x_1: x_2)$ mit $x_1 + x_2 = 1$



konvexkombination

$$\{(a, b) = \lambda_0(a_0, b_0) + \lambda_1(a_1, b_1) + \lambda_2(a_2, b_2) / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1\}$$

$$|TGL(2, \mathbb{F}_2)| = |\{(p_0, \dots, p_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)^4 / \text{keine 3 collinear}\}| = 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 = 168$$

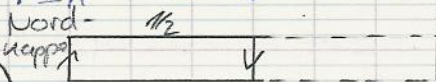
p,q,r collinear $\Leftrightarrow$ liegen auf einer Geraden

Beispiel:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} / \mathbb{R}^* = S^n / \pm 1$$

wobei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\|^2 = 1\}$ die Einheitsphäre bezeichnet.

z.B.: $S^2 / \pm 1$ identifiziert die Antipoden Punkte

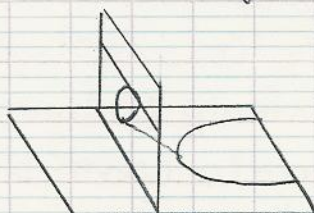


das Möbiusband
= Bied vom Äquatorgürtel



Ureisscheibe

Verklebe die Kappe = Ureisscheibe
mit dem Rand des Möbiusband
 $\rightarrow$ Projektiver Raum

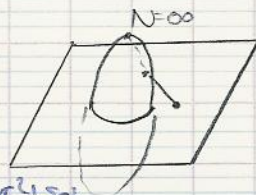


Beispiel

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$$

topologisch S^2



$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim \leftarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \cong S^3 = \{ (z_0, z_1) \mid \| (z_0, z_1) \|^2 = 1 \} \quad \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \supset S^{2n-1}$$

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \cong S^3 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$$

Fasern dieser Abb sind $S^1 = \text{Kreise} \cong \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1 \}$



$$S^1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$

Kreise um Torus

Man nennt $S^3 \rightarrow S^2$ die Hopffaserung