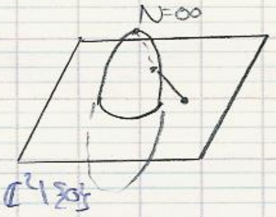
Beispiel

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty \underset{\text{topologisch}}{\cong} S^2$

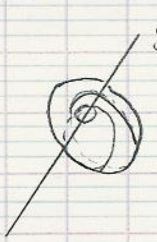


$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* \leftarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \supset S^3 = \{\|(z_0, z_1)\|^2 = 1\} \qquad \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \supset S^{2n-1}$

$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$

Fasern dieser Abb sind S^1-Kreise $\cong \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$



$S^1 \setminus \{\infty\} \quad \subset \mathbb{R}^3$

Kreise um Torus

Man nennt $S^3 \to S^2$ die Hopffaserung

20.05.08 **4.11 Definition**

Ein Polynom $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ heißt homogen vom Grad d, wenn alle Monome von f den gleichen Grad d haben.

Äquivalent, wenn

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$$

Beispiel:

$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ homogen vom Grad 2

Für homogenes Polynom f ist die Nullstellenmenge

$$X = V(f) = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0\}$$

wohldefiniert.

X nennt man eine Hyperebene vom Grad d in $\mathbb{P}^n$.

Speziell: Hyperebenen sind durch lineare Polynome

$$\ell(x_0, \dots, x_n) = b_0 x_0 + \dots + b_n x_n \text{ definiert.}$$

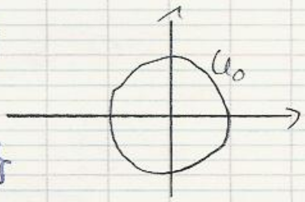
Beispiel:

Wir betrachten die Quadrik

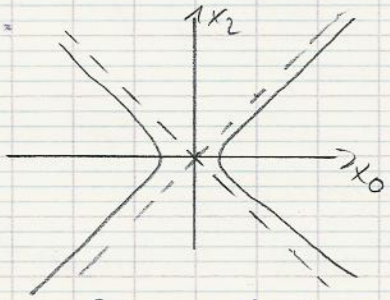
$$Q = V(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

In den drei Karten U_i $i = 0,1,2$, haben wir

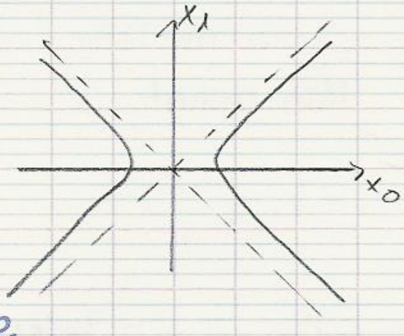
$Q \cap U_0 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$



$Q \cap U_1 = \{(x_0, x_2) \mid 1 + x_2^2 - x_0^2 = 0\}$

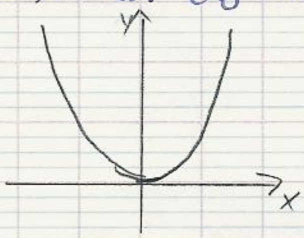


$Q \cap U_2 = \{(x_0, x_1) \mid x_1^2 + 1 - x_0^2 = 0\}$



Beispiel:

$y = x^2$ in $U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



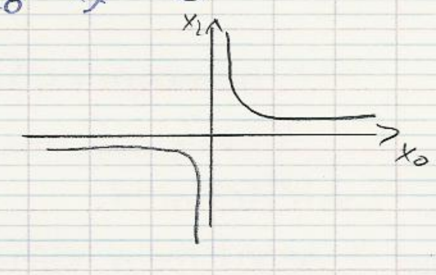
Homogenisierte Gleichung

$y = \frac{x_2}{x_0}$, $x = \frac{x_1}{x_0}$

$\frac{x_2}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 = 0 \quad | \cdot x_0^2$

$x_2 x_0 - x_1^2 = 0$

Karte U_1: $x_2 x_0 - 1 = 0$



4.12 Definition:
Eine ebene projektiv algebraische Kurve vom Grad d ist die Verschwindungsmenge in $\mathbb{P}^2(K)$ eines homogenen Polynoms vom Grad d.

4.13. Bemerkung

Ein homogenes Polynom $f\in\mathbb{C}[x_0,x_1]$ in zwei Variablen faktorisiert vollständig in Linearfaktoren.

$$f(x_0,x_1)=\prod_{i=1}^{d}(\beta_i x_0-\alpha_i x_0)$$

$f(1,z)$ faktorisiert, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen.

Die Punkte $(\alpha_1:\beta_1),\dots,(\alpha_d:\beta_d)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ bilden die Verschwindungsmenge von f.

4.14. Satz (Bézout)

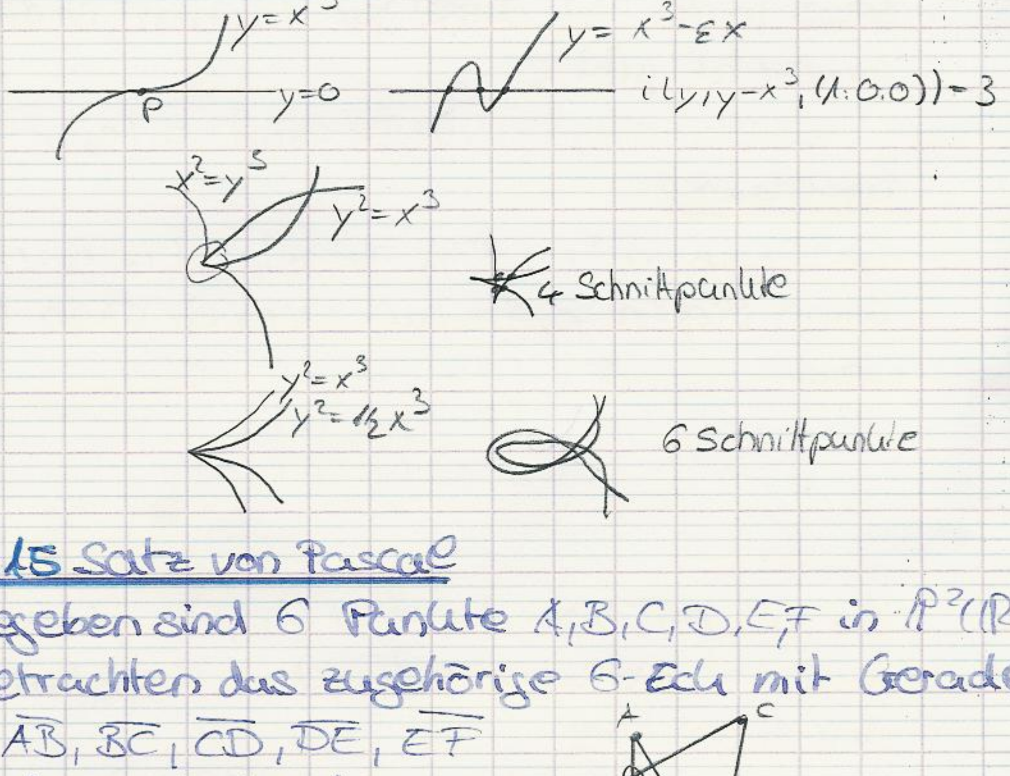
Seien C und $D\subset\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ zwei algebraische Kurven, definiert durch homogene Polynome $f,g\in\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]$ ohne gemeinsamen Faktor. Dann ist der Durchschnitt

$$C\cap D\subset\mathbb{P}^2 \text{ endlich.}$$

Genauer gilt:

$$\sum_{p\in C\cap D} i(f,g;p)=\deg C\cdot\deg D$$

Zur Schnittmultiplizität:



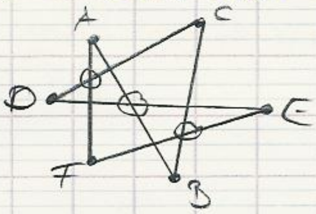
4.15 Satz von Pascal

Gegeben sind 6 Punkte A,B,C,D,E,F in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Wir betrachten das zugehörige 6-Eck mit Geraden

$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DE},\overline{EF}$

und die Schnittpunkte

$\overline{AB}\cap\overline{DE}$, $\overline{BC}\cap\overline{FE}$, $\overline{CD}\cap\overline{AF}$



Dann gilt: A, B, C, D, E, F liegen auf einer Quadrik, genau dann, wenn die 3 Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden liegen

<u>1. Beweis</u>: Mit Cinderella experimentell.
<u>2. Beweis</u>: Nachrechnen
<u>Bemerkung:</u>
Haben die Geraden
$$L_a = \{a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$$
$$L_b = \{b_0x_0 + \dots + b_2x_2 = 0\}$$
$L_a \neq L_b$ dann hat der Schnittpunkt die Koordinaten
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_2b_0 - a_0b_2 \\ a_0b_1 - b_0a_1 \end{pmatrix}$$
Die Koordinaten von p sind nicht alle Null, da $L_a \neq L_b$
$$p = (a_1b_2 - b_1a_2 : a_2b_0 - a_0b_2 : a_0b_1 - b_0a_1)$$
<u>Bew:</u> In der Tat diese für (x_0, x_1, x_2) in die Gleichung eingesetzt gibt 0.
$$a_0(a_1b_2 - a_2b_1) + a_1(a_2b_0 - a_0b_2) + a_2(a_0b_1 - a_1b_0) = 0$$
<u>Bemerkung 2.</u>
$$p = (p_0 : p_1 : p_2);\ q = (q_0 : q_1 : q_2),\ r = (r_0 : r_1 : r_2)$$
dann liegen p, q, r auf einer Geraden genau dann, wenn:
$$\det \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$
∎

$A, \dots, F$ mit Koordinaten $(x_1, y_1), \dots, (x_6, y_6)$ in $U_0 \subset \mathbb{P}^2$
Dann hat die Gerade durch $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$ die Gleichung
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x, y]$$

Die Bedingung

$$\overline{AB} \cap \overline{DE},\ \overline{BC} \cap \overline{EF},\ \overline{CD} \cap \overline{AF}$$

liegen auf einer Geraden, ist ein Polynom vom Grad 12 in den affinen Koordinaten $(1 : x_i : y_i)$ $i = 1, \dots, 6$.

Bemerkung 3

Je 5 Punkte mit, keine 3 collinear, liegen auf einem Kegelschnitt

Beweis:

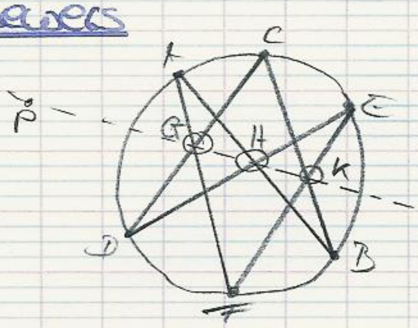
$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \varphi = 0 \quad, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi \in \mathbb{R}$$

Die Quadrik durch die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_5, y_5)$ ist durch

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_5^2 & x_5 y_5 & \dots & & & 1 \\ x^2 & xy & \dots & & & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{gegeben.}$$

(x_6, y_6) eingesetzt ergibt ein Polynom vom Grad 12.

3. Beweis



$\overline{AB} \cup \overline{CD} \cup \overline{EF} = V(e_1 \cdot e_2 \cdot e_3)$

$\overline{BC} \cup \overline{DE} \cup \overline{FA} = V(e_1' \cdot e_2' \cdot e_3')$

$f_\lambda(x, y, z) = e_1 e_2 e_3 + \lambda e_1' e_2' e_3'$

cubisches Polynom

$V(f_\lambda)$ enthält alle 9 Punkte.

Wähle jetzt einen Punkt auf der Verbindungsgeraden $p \in \overline{GH}$.

Angenommen GHK sind collinear.

Betrachte $\lambda = \dfrac{e_1 e_2 e_3(p)}{e_1' e_2' e_3'(p)} \in \mathbb{R}$

Dann enthält die Kurve $V(f_\lambda)$ auch den Punkt p, Also 4 Punkte auf der Geraden GH.

$\Rightarrow$ Die Gleichung der Geraden $\overline{GH}$ ist ein Faktor von $f_\lambda = \underset{\text{linear}}{\ell} \cdot \underset{\text{quadratisch}}{q}$, $\Rightarrow A, B, C, D, E, F$ liegen auf der Quadrik $\{q = 0\}$