27.05.08

4.16 Definition:

Sei V ein K-Vektorraum, $\mathbb{P}(V)$ der zugehörige projektive Raum und V^* sein Dualraum.
Dann ist $\mathbb{P}(V^*)$ der duale projektive Raum zu $\mathbb{P}(V)$.

Die Elemente von $\mathbb{P}(V^*)$ können wir mit der Hyperebene in $\mathbb{P}(V)$ identifizieren.

$\varphi \in V^* \setminus \{0\}$, $\{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subset V$,

$\mathbb{P}(\{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}) = H_\varphi \subset \mathbb{P}(V)$

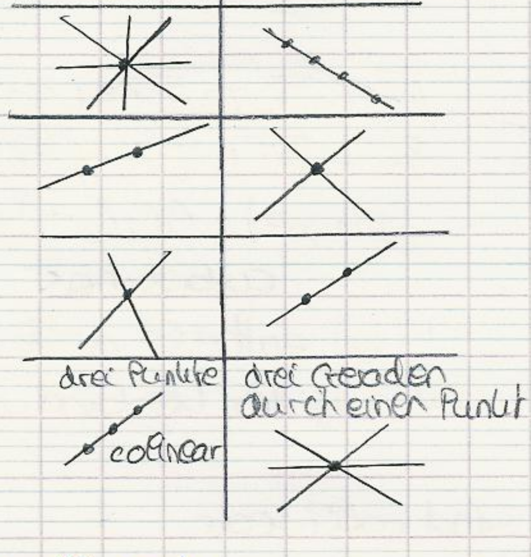
Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ und den dualen Raum $\check{\mathbb{P}}^2 = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}))$.

$$(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$$

$$\check{\mathbb{P}}^2 \ni (a_0 : a_1 : a_2) \longleftrightarrow \{\langle x \rangle \in \mathbb{P}^2 \mid a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$$

4.17:

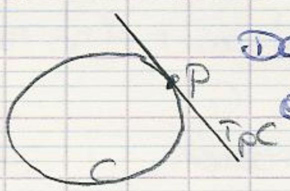
$\mathbb{P}^2$	$\check{\mathbb{P}}^2$
• Punkt	Gerade
/ Gerade	Punkt • $\check{\mathbb{P}}^2$



4.18 Satz:

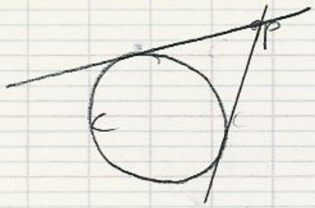
Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine glatte Quadrik

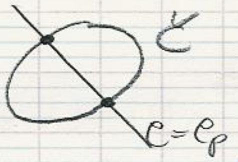
Dann ist $\check{C} = \{\text{Tangenten an } C\}$ erneut eine Quadrik



„Beweis":

Wir zeigen eine allgemeine Gerade $\ell \subset \check{\mathbb{P}}^2$ schneidet $\check{C}$ in zwei Punkten ⇝ $\check{C}$ ist auch eine Quadrik

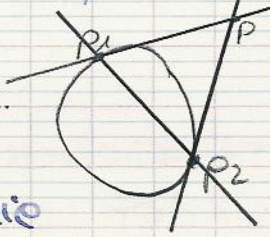




Zu zeigen ist, es gibt zwei Tangenten an C durch p.
Stimmt. ■

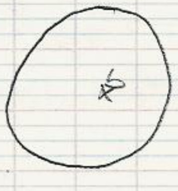
4.19. Definition

Sei $Q \subset \mathbb{P}^2$ eine glatte Quadrik, $p \in \mathbb{P}^2 \setminus Q$. Dann gibt es zwei Tangenten an Q durch p mit Aufpunkten p_1, p_2.
Die Gerade durch p_1, p_2 heißt Polare von p bzgl. Q.
Ist $Q = \{q(x) = 0\}$ und $b = (b_0 : b_1 : b_2)$. Dann ist die Gleichung der Polaren durch die Linearform

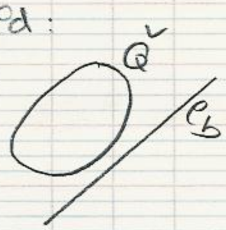


$$b_0 \frac{\partial q}{\partial x_0} + b_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial q}{\partial x_2} = \ell_b(x)$$

Beispiel:



duales Bild:



4.20 Satz von Brianchon

Sei $Q \subset \mathbb{P}^2$ eine Quadrik, glatt.

Die Verbindungsgeraden von gegenüberliegenden Schnittpunkten der Tangenten

$T_A \cap T_B, T_D \cap T_E$

$T_B \cap T_C, T_E \cap T_F$

$T_C \cap T_D, T_F \cap T_A$ gehen durch einen Punkt.

Beweis: Dualität (Satz von Pascal). ■

4.21. Duale Kurven im Allgemeinen

Sei $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eine Kurve. Dann heißt
$$\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2 \text{ mit } \check{C} = \{T_pC \mid p \in C\}$$
die duale Kurve.

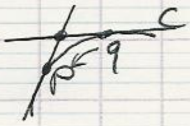
Bemerkung

Da $V = \mathbb{R}^3$ endl. dimensional ist, gilt
$$V^{**} \cong V \text{ kanonisch, also } \check{\check{\mathbb{P}}}^2 = \mathbb{P}^2$$
Mit $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ ist dann $\check{\check{C}} \subset \check{\check{\mathbb{P}}}^2 = \mathbb{P}^2$

Satz:

Für $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eine Kurve gilt: $\check{\check{C}} = C$

„Beweis":

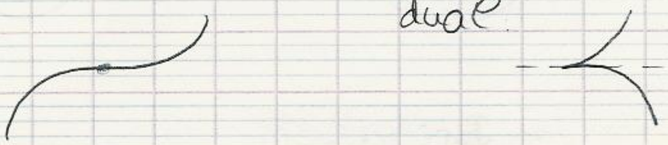


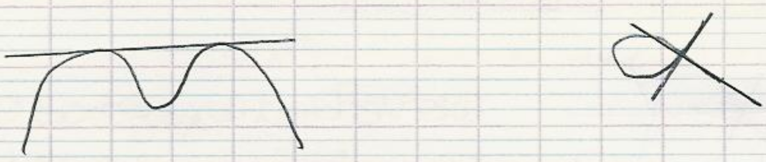
Im Bild sehen wir: Läuft $q \to p$, also $T_qC \to T_pC$, dann ist der Limes der Sekanten $T_pC\,T_qC$ die Tangente.

Augenscheinlich geht der Schnittpunkt von $T_pC \cap T_qC \in \mathbb{P}^2$ im Limes zum Punkt p.

d.h.
$$\begin{array}{ccccc} C & \longrightarrow & \check{C} & \longrightarrow & \check{\check{C}} \subset \mathbb{P}^2 \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ p & \longmapsto & T_pC & \longmapsto & T_{T_pC}\check{C} = p \end{array}$$

Der "Beweis" ist problematisch in Wendepunkten.





§ 5 Multilineare Algebra

Tensoren werden zunächst in der Physik eingeführt, als vektorwertige Größen, die sich bei Basiswechsel auf bestimmte Weise transformieren.
Wir wollen Tensoren ohne Bezug auf eine Basiswahl der Vektorräume einführen.

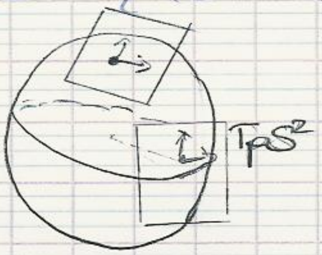
Beispiel:

V, W K-Vektorräume

$\mathrm{Hom}(V,W)$ ist erneut ein K-Vektorraum.
Ist etwa $V = K^n$, $W = K^m$ dann ist $\mathrm{Hom}(K^n, K^m) = K^{m \times n}$ der Vektorraum der Matrizen. Der abstraktere Raum $\mathrm{Hom}(V,W)$ hat den Vorteil, dass die Operation von $GL(V) \times GL(W)$ evident ist.
in anderen Fällen, etwa in der Differentialgeometrie wo wir Familien von Vektoren betrachten ist eine simultane "stetige" Basiswahl vielleicht gar nicht möglich.

Beispiel:

$S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1 \}$



Frage: Gibt es eine stetige Familie von Vektoren $v_1(p), v_2(p) \in T_pS^2 \subset \mathbb{R}^3$ die jeweils eine Basis von T_pS^2 bilden?

Satz aus der Topologie

Sei $v: S^2 \to \mathbb{R}^3$ eine stetige Abb.
so $v(p) \in T_pS^2 \subset \mathbb{R}^3$ für alle $p \in S^2$
Darum hat v wenigstens eine Nullstelle

Also werden wir das Tensorkalkül koordinatenfrei einführen.

5.1. Definition

Eine Abbildung

$$\varphi: V \times W \to U$$

zwischen K-Vektorräumen V, W und U heißt bilinear, wenn φ linear in beiden Komponenten ist.

1) $\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \varphi(v_1, w) + \lambda_2 \varphi(v_2, w)$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$ $v_1, v_2 \in V, w \in W$

2) $\varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, v \in V, w_1, w_2 \in W$

Das Tensorprodukt hilft das Studium von bilinearen Abbildungen auf lineare Abb. zurückzuführen.

Beispiel:

$$\mathrm{Hom}(V, W) \times \mathrm{Hom}(W, U) \to \mathrm{Hom}(V, U)$$
$$(\varphi, \psi) \longmapsto \psi \circ \varphi$$

ist bilinear.