§ 5 Multilineare Algebra

Tensoren werden zunächst in der Physik eingeführt, als vektorwertige Größen, die sich bei Basiswechsel auf bestimmte Weise transformieren.
Wir wollen Tensoren ohne Bezug auf eine Basiswahl der Vektorräume einführen.

__Beispiel:__

V, W K-Vektorräume

$Hom(V,W)$ ist **erneut** ein K-Vektorraum.

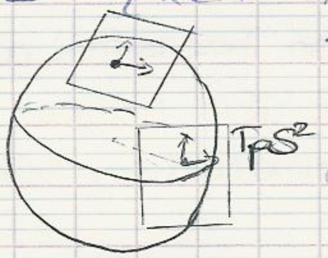
Ist etwa $V = K^n$, $W = K^m$ dann ist $Hom(K^n, K^m) = K^{m \times n}$ der Vektorraum der Matrizen. Der abstraktere Raum $Hom(V,W)$ hat den Vorteil, dass die Operation von $Gl(V) \times Gl(W)$ evident ist.

In anderen Fällen, etwa in der Differentialgeometrie wo wir Familien von Vektoren betrachten ist eine simultane "stetige" Basiswahl vielleicht gar nicht möglich.

__Beispiel:__

$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\}$

Tangentialraum kann keine Basen wählen für die T_pS^2 die stetig von p abhängen



Frage: Gibt es eine stetige Familie von Vektoren $v_1(p), v_2(p) \in T_pS^2 \subset \mathbb{R}^3$ die jeweils eine Basis von T_pS^2 bilden?

→ Wollen wir aus diesen VR simultan für alle p neue VR konstruieren dann müssen wir dies ohne Basiswahl tun

__Satz aus der Topologie__

Sei $v: S^2 \to \mathbb{R}^3$ eine stetige Abb.
so $v(p) \in T_pS^2 \subset \mathbb{R}^3$ für alle $p \in S^2$
Darum hat v wenigstens eine Nullstelle

⇒ Multilineare Algebra beschreibt die grundlegenden nat. Konstruktionen von VR aus gg VR

Also werden wir das Tensorkalkül koordinatenfrei einführen.

5.1. Definition

Eine Abbildung
$$\varphi: V \times W \to U$$
zwischen K-Vektorräumen V, W und U heißt bilinear, wenn φ linear in beiden Komponenten ist.

1) $\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \varphi(v_1, w) + \lambda_2 \varphi(v_2, w)$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$

2) $\varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, v \in V, w_2 \in W$

Das Tensorprodukt hilft das Studium von bilinearen Abbildungen auf lineare Abb. zurückzuführen.

Beispiel:
$$\mathrm{Hom}(V,W) \times \mathrm{Hom}(W,U) \to \mathrm{Hom}(V,U)$$
$$(\varphi, \psi) \longmapsto \psi \circ \varphi$$
ist bilinear.

29.05.08 Anwendungen:

Tensoranalysis in Differentialgeometrie
Physik (allg. Relativitätstheorie, Elektrodynamik)

Wir geben die Konstruktion basisfrei an.
Deshalb können wir statt VR über Körper K allgemeiner Moduln V über einen kommutativen Ring K mit 1 betrachten.

Bemerkung

Ein Modul V über K ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Verknüpfung (Skalarprodukt) $K \times M \to M$, $(r, m) \mapsto r \cdot m$

mit
$$r_1(r_2 \cdot m) = (r_1 \cdot r_2) m$$
$$(r_1 + r_2) m = r_1 m + r_2 m$$
$$r(m_1 + m_2) = r m_1 + r m_2$$
$$1 \cdot m = m$$

__Beispiel:__

V, W K-Moduln. Mit Hilfe des Tensorprodukts $V \otimes W$ lassen sich bilineare Abb $V \times W \to X$ für einen beliebigen K-Modul X zurückführen auf eine bilineare Abb. $V \times W \to V \otimes W$ und lineare Abbildungen $V \otimes W \to X$ d.h. $\underset{K}{\mathrm{Bil}}(V, W; X) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes W, X)$

Modul der bilinearen Abb $V \times W \to X$

5.1. Direkte Summe und direktes Produkt

Aus einer Familie $(V_i)_{i \in I}$ von K-Moduln (wobei I eine beliebige Indexmenge ist), können wir folgende Moduln bilden

5.2. Definition

Die __direkte Summe__ der $(V_i)_{i \in I}$

$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{ (v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i \text{ alle bis auf endl. viele } v_i \text{ sind } 0 \}$$

fast alle

und das __direkte Produkt__

$$\prod_{i \in I} V_i := \{ (v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i \}$$

sind K-Moduln durch $(v_i) + (w_i) := (v_i + w_i)_i$

$\lambda (v_i) := (\lambda v_i)_i$

Wir werden sehen, dass beide relevant sind. Was ist der Unterschied?

Bezeichne mit

$$\iota_i : V_i \to \bigoplus_{j \in I} V_j, \; v \mapsto (v_j)_{j \in I}, \; v_j = \begin{cases} v & j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ die } \underline{\text{Inklusion}}$$

und mit

$$p_i : \prod_{j \in I} V_j \to V_i, \; (v_j)_{j \in I} \to v_i \text{ die } \underline{\text{Projektion}}.$$

Sei im Folgenden $(V_i)_{i \in I}$ immer eine Familie von K-Moduln.

5.3. Satz:

$\bigoplus_{j \in I} V_j$ hat folgende universelle Eigenschaft:

Für jede Familie von Homomorphismen $\varphi_i : V_i \to W, i \in I$ existiert genau ein Hom. $\varphi : \bigoplus_{j \in I} V_j \to W$, so dass folgende

Diagramme $\forall i$ kommutieren

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \bigoplus_{j\in I} V_j \arrow[d, "\varphi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

d.h. $\varphi_i = \varphi \circ u_i$

<u>**Beweis:**</u>

φ ist eindeutig:

Ist $v \in \bigoplus_{j\in I} V_j$, dann $v = \sum_{\text{endl.}} u_i(v_i)$

Kommutieren die Diagramme, dann $\varphi(v) = \sum_{\text{endl.}} \varphi(u_i(v_i))$

$= \sum_{\text{endl.}} \varphi_i(v_i)$ ✓

Existenz:

Definiere φ durch diese Formel

(Wohldefiniertheit:

In der Darstellung $v = \sum_{\text{endl.}} u_i$ sind die v_i eindeutig, denn die

u_i sind injektiv)

<u>**5.4. Satz:**</u>

$\prod_{j\in I} V_j$ hat folgende universelle Eigenschaft:

Für jede Familie von Hom. $\psi_i : W \to V_i$, $i \in I$

existiert genau ein Hom. $\psi : W \to \prod_{j\in I} V_j$, so dass

für alle i das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \prod_{j\in I} V_j \arrow[d, "p_i"] \\ & V_i \end{tikzcd}$$

kommutiert.

<u>**Beweis:**</u>

ψ eindeutig:

Sei $w \in W$, kommutieren die Diagramme $\psi(w) = (\psi_i(w))_{i\in I}$ ✓

Existenz:

Definiere ψ durch die Formel ✓

5.5. Definition

Zu einem k-Modul V bezeichne

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, K) \text{ den dualen Modul.}$$

5.6. Corollar

Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\left(\bigoplus_{j\in I} V_j\right)^* \cong \prod_{j\in I} (V_j^*)$$

Beweis:

Existenz des Hom.:

Zu der Familie $u_i^* : \left(\bigoplus_{j\in I} V_j\right)^* \to V_i^*$

$\lambda \mapsto \lambda \circ u_i \ , i \in I$

gibt es wegen der universellen Eigenschaft von $\prod$ genau einen Hom φ, so dass

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigoplus_{j\in I} V_i\right)^* \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "u_i^*"'] & & \prod_{j\in I} V_j^* \arrow[dl, "p_i"] \\
& V_i^* &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

φ ist injektiv:

Ist $\lambda \in \left(\bigoplus_{j\in I} V_i\right)^*$ dann gilt $\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{p_i(\varphi(\lambda))}_{u_i^*(\lambda) = \lambda\circ u_i} = 0 \ \forall i.$

Also gilt dann für beliebiges $v = \sum_{\text{endl.}} u_i(v_i) \in \bigoplus_{j\in I} V_j$

$$\lambda(v) = \sum_{\text{endl.}} \lambda(u_i(v_i)) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

φ surjektiv:

Sei $g \in \prod_{j\in I} V_j^*$. Zu der Familie $\underbrace{p_i(g)}_{\in V_i^*} =: \psi_i : V_i \to K$

gibt es mit der universellen Eigenschaft von $\oplus$ ein

$$\psi : \bigoplus_{j\in I} V_j \to K \ (=:\lambda), \text{ so dass}$$

$$\begin{tikzcd}
V_i \arrow[rr, "u_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & \bigoplus_{j\in I} V_j \arrow[dl, "\psi"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

$\forall i$ kommutiert.

also gilt für $\psi \in \left(\bigoplus_{j\in I} V_j\right)^*$, dass

$$(p_i \circ \Psi)(\varphi) = u_i^*(\varphi) = \varphi \circ u_i = \varphi_i = p_i(S)$$
$$\Rightarrow p_i(\Psi(\varphi) - S) = 0 \ \forall i \Rightarrow \Psi(\varphi) = S \quad \blacksquare$$

5.7. Bemerkung:

Definiere $V^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} V$, $V^I = \prod_{i\in I} V$ (d.h. $V_i = V \ \forall i$)

5.8. Definition

Sei R ein Ring. Ein freier R-Module F ist ein Module der isomorph ist zu $R^{(I)}$, wobei I eine geeignete Indexmenge ist, also
$$F \cong \bigoplus_{i\in I} R = R^{(I)}$$

5.9. Beispiel:

Jeder endlich dim K-VR V über Körper K ist ein freier K-Module. $V \cong \bigoplus_{i=1}^{d} K = \prod_{i=1}^{d} K$, $d = \dim_K V$

Tatsächlich ist jeder K-VR ein freier K-Module (mit tieferliegenden Methoden der Mengenlehre)

5.10. Satz:

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Jeder R-Module M ist isomorph zu einem Quotienten eines freien R-Moduls, d.h. $\exists$ Indexmenge I und Untermodule $U \subset R^{(I)}$, sodass $M \cong R^{(I)}/U$

Beweis:

Für jedes $m \in M$ haben wir den R-Modulehomomorphismus
$$\varphi_m : R \to M, \ r \mapsto rm$$
Nach der universellen Eigenschaft von $\oplus$ gibt es zu $\varphi_m, m \in M$ ein $\varphi : R^{(M)} = \bigoplus_{m\in M} R \to M$, so dass folgende Diagramme kommutieren:
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "u_m"] \arrow[dr, "\varphi_m"'] & R^{(M)} \arrow[d, "\varphi"] \\ & M \end{tikzcd} \quad \forall m \in M.$$
φ ist surjektiv, denn $\varphi((\delta_{n,m})_{n\in M}) = m$

Setze $U = \ker(\varphi)$. Der Homomorphiesatz liefert:
$$M = \mathrm{Bild}(\varphi) \cong R^{(M)}/\ker(\varphi) = R^{(M)}/U \quad \blacksquare$$