03.06.08 Für einen freien R-Modul $R^{(I)}$ sei $\iota_i: R \to R^{(I)}$ die Inklusion des i-ten Summanden.

Sei $e_i := \iota_i(1)$. Jedes Element $v \in R^{(I)}$ hat eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{\substack{i \in J \\ J \subset I \text{ endlich}}} \lambda_i e_i$

Wir sagen $(e_i)_{i\in I}$ ist Basis von $R^{(I)}$

Wir definieren durch $e_i^*: R^{(I)} \to R$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

Es gilt: $id_R = e_i^* \circ \iota_i$

5.2. Das Tensorprodukt

5.11. Definition:

V, W, X K-Module.

Eine Abb. $\varphi: V \times W \to X$, $(v,w) \mapsto \varphi(v,w)$ heißt K-linear

wenn: $\forall \lambda \in K, v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ gilt:

$$\varphi(\lambda v, w) = \lambda \varphi(v,w) = \varphi(v, \lambda w)$$
$$\varphi(v_1 + v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$$
$$\varphi(v, w_1 + w_2) = \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)$$

Die Menge $Bil(V, W; X)$ aller bilinearer Abb.: $V \times W \to X$ ist ein Untermodul der $Abb(V, W; X)$

5.12. Beispiele:

1) K Körper, $V = W$, $X = K$ $\quad S: V \times V \to K$ Bilinearform

2) Sind U, V, W K-Moduln, dann ist

$$Hom(U,V) \times Hom(V,W) \to Hom(U,W)$$
$$(f,g) \mapsto g \circ f$$

bilinear.

Mit Hilfe des Tensorprodukts $V \otimes W$ lassen sich bilineare Abb. $V \times W \to X$ für ein beliebiges X auf eine einzige bilineare Abb. $V \times W \to V \otimes W$ und lineare Abb. $V \otimes W \to X$ zurückführen.

5.13. Definition:

Seien V, W zwei K-Moduln. Ein Tensorprodukt von V und W besteht aus einem K-Modul T und einer bilinearen Abb. $\tau: V \times W \to T$ die folgende universelle Eigenschaft hat:

$\forall$ K-Moduln X und alle bilinearen Abb. $\varphi: V \times W \to X$ existiert genau eine lineare Abb. $\phi: T \to X$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & T \arrow[d, "\exists!\phi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Solch ein Paar (T, τ) leistet das, was wir wollen, denn wir haben einen K-Modulisomorphismus

$$\mathrm{Bil}(V, W; X) \cong \mathrm{Hom}(T, X)$$
$$\varphi \mapsto \phi$$
$$\phi \circ \tau \leftarrow\!\shortmid \phi$$

$\Rightarrow$ bijektiv ✓

linear $(\phi_1 + \phi_2) \circ \tau = \phi_1 \circ \tau + \phi_2 \circ \tau$

5.14. Satz:

Das Tensorprodukt von V und W ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: (Typisch für universelle Eigenschaft)

Seien (T, τ) und (T', τ') zwei Tensorprodukte von V und W. Nach der universellen Eigenschaft von (T, τ) angewandt auf τ' gibt es genau eine lineare Abb. $\phi: T \to T'$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & T \arrow[d, "\phi"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Analog gibt es ein eindeutig bestimmtes $\phi': T' \to T$. Da

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau"'] & T \arrow[d, "\phi' \circ \phi"] \\ & T \end{tikzcd}$$

kommutiert, muss nach der

Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft gelten, dass $\phi'\circ\phi = id_T$. Analog: $\phi\circ\phi' = id_{T'}$

d.h.
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & T \arrow[d, shift left, "\phi"] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ & T' \arrow[u, shift left=3, "\phi'"'] \end{tikzcd}$$
d.h. T und T' sind, vermöge der eindeutig bestimmten Abb. ϕ, ϕ', isomorph (also kanonisch isomorph).

Man spricht daher von <u>dem</u> Tensorprodukt $T = V\otimes W$ von V und W.

<u>5.15. Satz</u>

Für alle K-Moduln V, W existiert das Tensorprodukt.

<u>Beweis</u>:

Da das Tensorprodukt bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt ist, spielt es keine Rolle wie wir es konstruieren. Wir wählen im Folgenden eine Konstruktion, die zunächst wenig mehr als die Existenz zeigt, aber gerade für den praktischen Umgang mit dem Tensorprodukt sehr nützlich ist.

Betrachte die Indexmenge $I = V\times W$ und dazu den freien Modul $K^{(V\times W)} = \bigoplus_{(v,w)\in V\times W} K$ mit Basis $e_{(v,w)}$, $(v,w)\in V\times W$.

Wir haben eine natürliche Abb. $\delta: V\times W \to K^{(V\times W)}$, $(v,w)\mapsto e_{(v,w)}$

δ ist allerdings nicht bilinear, denn i.A. gilt
$$\delta(\lambda v,w) = e_{(\lambda v,w)} \neq \lambda e_{(v,w)} = \lambda\delta(v,w)$$
Sei $U\subset K^{(V\times W)}$ der Untermodul erzeugt von
$$\circledast \left\{ \begin{array}{l} e_{(\lambda v,w)} - \lambda e_{(v,w)},\ e_{(v,\lambda w)} - \lambda e_{(v,w)} \\ e_{(v_1+v_2,w)} - e_{(v_1,w)} - e_{(v_2,w)},\ e_{(v,w_1+w_2)} - e_{(v,w_1)} - e_{(v,w_2)} \end{array} \right. \in K^{(V\times W)}$$
für $\lambda\in K$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$

Sei $T := K^{(V\times W)}/U$ und $\rho: K^{(V\times W)} \to T$, $a \mapsto a+U$ Restklassenabb.

Die Komposition von δ mit ρ gibt:

Abb.: $\tau = \rho\circ\delta: V\times W \to T$
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\tau"'] & K^{(V\times W)} \arrow[d, "\rho"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion von U ist τ K-bilinear (z.B.
$\tau(\lambda v,w) = e_{(\lambda v,w)}+U = \lambda e_{(v,w)}+U = \lambda\tau(v,w)$), da
$e_{(\lambda v,w)}-\lambda e_{(v,w)} \in U$

Zeige nun, dass der K-Modul T zusammen mit τ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts erfüllt:

Sei $\varphi: V\times W \to X$ eine bilineare Abb.

$\phi_0 : K^{(V\times W)} \to X,\ e_{(v,w)} \mapsto \varphi(v,w)$ definiert eine K-lineare Abb.

Da φ bilinear ist, werden die oben angegebenen Erzeuger von U durch ϕ_0 auf $0\in X$ abgebildet.

$(\phi_0(e_{(\lambda v_1+v_2,w)}-\lambda e_{(v_1,w)}-e_{(v_2,w)}) = \varphi(\lambda v_1+v_2,w)-\lambda\varphi(v_1,w)-\varphi(v_2,w)$

$= \lambda\varphi(v_1,w)+\varphi(v_2,w)-\lambda\varphi(v_1,w)-\varphi(v_2,w) = 0$

$\Rightarrow U \subset \ker(\phi_0)$

$\Rightarrow \phi_0$ induziert eine wohldefinierte K-lineare Abb.

$$\phi : T = K^{(V\times W)}/U \to X$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T \arrow[d, "\phi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

kommutiert, denn

$\phi(\tau(v,w)) = \phi(e_{(v,w)}+U) = \phi_0(e_{(v,w)}) = \varphi(v,w)$. ■

5.16. Notation

Man bezeichnet das Tensorprodukt von V und W mit $V\otimes W = T$. Das Bild von $(v,w)\in V\times W$ in $V\otimes W$ und mit $v\otimes w$ bezeichnet d.h. $\tau : V\times W \to V\otimes W$, $(v,w)\mapsto v\otimes w$

Die Elemente von $V\otimes W$ sind also endliche Summen der Gestalt $\sum_{\text{endl.}} v_i\otimes w_i \in V\otimes W$.

Im Allgemeinen ist es nicht trivial zu entscheiden, ob zwei solche Ausdrücke

$$\sum_{\text{endl.}} v_i\otimes w_i \quad \text{und} \quad \sum_{\text{endl.}} v_j'\otimes w_j'$$

das gleiche Element in $V\otimes W$ repräsentieren.

Will man den Ring K hervorheben (z.B. wenn mehrere Ringe vorkommen) schreibt man $V \otimes_K W$ und spricht dann vom Tensorprodukt von V und W über K.