

17.04.06

Also $\text{Hau}(p, \lambda) = \ker((p - \lambda \text{id}_V)^{s_0})$

4.) Ist $p \in \text{End}(K^n)$ durch die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, r_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k, r_k) \end{pmatrix} \text{ in Jordanscher Normalform}$$

gegeben und $\lambda_1 = \dots = \lambda_{j-1} = \lambda$, $\lambda_j \neq \lambda_1, \dots, \lambda_k \neq \lambda$

$$\Rightarrow (J - \lambda E_n) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_j - \lambda \end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \lambda_k - \lambda & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k - \lambda \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (J - \lambda E_n)^s = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda & 1 \\ & \lambda_j - \lambda \end{pmatrix}^s & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} (\lambda_k - \lambda)^s & * \\ & (\lambda_k - \lambda)^s \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad s \gg 0$$

sind invertierbar

$\ker((J - \lambda E_n)^s) = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$, wobei $e_1, \dots, e_m$ die Einheitsvektoren, die zu den Blöcken mit $\lambda_j = \lambda$ gehören für $s \gg 0$.

$$\text{Hau}(J, \lambda) = \langle e_1, \dots, e_m \rangle \quad m = r_1 + r_2 + \dots + r_{j-1}$$

1.9. Satz: Sei $f \in \text{End}(V)$ eine Endomorph. eines endlich dim. K -VR V und $\alpha \in K$ eine Nullstelle von

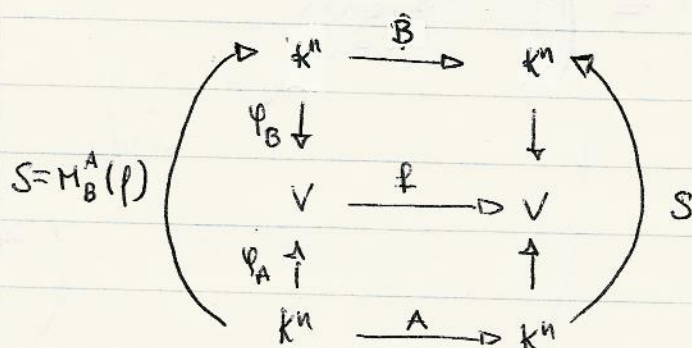
$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = \chi_f(t) = \det(f - t \text{id}_V)$$

wobei $A = M_A^A(f)$.

$$B = M_B^B(f), \quad B = SAS^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$S = M_A^B(\text{id}_V)$$



mit der Multiplizität $r = m(\chi_f(t), \alpha)$.

Dann gilt für den Hauptraum $W = \text{Hau}(f, \alpha)$:

(a) $\dim W = r$, $W = \ker((f - \alpha \text{id}_V)^r)$

(b) $f(W) \subset W$

(c) Das charakteristische Polynom von $f|_W \in \text{End}(W)$ ist $\chi_{f|_W}(t) = (\alpha - t)^r$

(d) $(f|_W - \alpha \text{id}_W)^r = 0$

1.10. Hilfssatz: $p \in \text{End}(V)$, $\dim V < \infty$, λ ein EW von p .

$m(x_p, \lambda) = r$. Dann existiert eine Basis $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V so dass

$$M_A^A(p) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{matrix} & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \begin{matrix} \} r \\ \\ \} n-r \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_r \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-r}$

und λ kein EW von D .

Bew: Sei v_1 ein EV von λ . wir ergänzen v_1 zu Basis $A = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$M_A^A(p) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \\ A' \end{matrix} \end{array} \right) = A$$

Für $x_p(t) = x_A(t) = (\lambda - t) \cdot x_{A'}(t)$, gilt $m(x_{A'}(t), \lambda) = r-1$

Ist $r=1$, dann ist λ keine NS von $x_{A'}(t)$

$\Rightarrow \lambda$ kein EW von A' . Andernfalls argumentieren wir mit Induktion nach r .

Basiswechsel in den Raum $\langle v_2, \dots, v_n \rangle$ überführt A in eine Matrix

$$A' = M_{A'}^{A'}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & * \\ 0 & A \cdot \lambda \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r-1}$

∇

A'

□

Beweis von Satz 1.9:

Wählen A wie im Hilfssatz.

$$A = M_A^A(p).$$

$$B = (A - \alpha E_n) = M_A^A(p - \alpha \text{id}_V) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{matrix} & c \\ \hline 0 & \tilde{D} \end{array} \right) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{r=m(\chi_{H, \alpha})}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} N & c \\ \hline 0 & \tilde{D} \end{array} \right) \text{ mit } N \text{ nilpotent und } \tilde{D} \text{ invertierbar.}$$

Da α kein EW von $\tilde{D}$ ist.

$$\Rightarrow B^s = \left(\begin{array}{c|c} N^s & * \\ \hline 0 & \tilde{D}^s \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \tilde{D}^s \end{array} \right) \text{ für } s \geq r$$

$$\Rightarrow \ker(B^s) = \ker(B^r) = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \text{ da } \tilde{D}^s \text{ f\"ur } s \geq r \text{ invertierbar}$$

$$\Rightarrow \ker((p - \alpha \text{id}_V)^r) = \langle v_1, \dots, v_r \rangle = W = \text{Kern}(p, \alpha).$$

Dies zeigt (a)

zu (b): $f(W) \subset W$ folgt aus der Gestalt von

$$A = M_A^A(p) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha \end{matrix} & c \\ \hline 0 & \tilde{D} \end{array} \right)$$

zu (c): $\chi_{f|_W} = (\alpha - t)^r$ siehe Matrix aus (b)

zu (d): $(p|_W - \alpha \text{id}_W)^r = 0$ folgt da $M_{\{v_1, \dots, v_r\}}^{\{v_1, \dots, v_r\}}(p|_W) = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.11. Satz: Zerlegung in Haupträume.

Sei $f \in \text{End}(V)$ eines endl. dim VR V , dessen charakteristisches Polynom $\chi_f(t)$ in $K[t]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dann gilt:

$$V = \text{Hau}(f, \alpha_1) \oplus \dots \oplus \text{Hau}(f, \alpha_k)$$

wobei α_1 bis α_k paarweise versch. EWe sind. (von f)

$$\Gamma \quad U, W \subset V \quad U \cap W = \{0\} \Rightarrow U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$$

Wir nennen $U+W$ direkte Summe von U und W

schreibweise $U \oplus W = U+W$, falls $U \cap W = \{0\}$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt, dass

$$\chi_f(t) = \pm (t - \alpha_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (t - \alpha_k)^{r_k} = (\alpha_1 - t)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\alpha_k - t)^{r_k}$$

und nach dem Satz 1.9 $W_i := \text{Hau}(f, \alpha_i)$

$$\dim(W_i) = r_i$$

$$\text{Also } n = \dim V = \deg \chi_f(t) = r_1 + \dots + r_k$$

Es reicht zu zeigen, dass

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k) = \{0\} \quad \forall i = 1, \dots, k$$

OBdA: Sei $i = 1$. Angenommen $v_1 = v_2 + \dots + v_k \in W_1 \cap (W_2 + \dots + W_k)$

wobei $v_i \in W_i$.

Wir wenden auf v_1 den Endomorph

$$g = (f - \alpha_2 \text{id}_V)^{r_2} \circ \dots \circ (f - \alpha_k \text{id}_V)^{r_k} \text{ an.}$$

Nach 1.9 (b) gilt $f(W_i) \subset W_i \quad \forall i$

also auch $(f - \alpha_i \text{id}_V)(W_i) \subset W_i \quad \forall i$

Ferner $(p - \alpha_i \text{id}_V)^{r_i}(w_i) = 0$

Es folgt $g(v_k) = 0$

$$g(v_{k-1}) = (p - \alpha_2 \text{id}_V)^{r_2} \circ \dots \circ (p - \alpha_{k-1} \text{id}_V)^{r_{k-1}}(v'_{k-1}) = 0$$

$\in W_{k-1}$

usw. $g(v_i) = 0$ für $i = 2, \dots, k$

Wegen der Linearität folgt $g(v) = g(v_2 + \dots + v_k) = 0$

Andererseits $(p - \alpha_i \text{id}_V)|_{W_i}$ ein Isomph $\in \text{End}(W_i)$,

da α_i kein EW von $p|_{W_i}$ ist (für $i = 2, \dots, k$)

Es folgt: $g|_{W_i}$ ist ein Isomph, als Komposition von Isomphen

$$\Rightarrow v_i \in W_i \text{ gilt } g(v_i) = 0 \Rightarrow v_i = 0$$

$$\text{Das zeigt } W_1 \cap (W_2 + W_3 + \dots + W_k) = 0$$

□

1.12 Corollar: Sei $p \in \text{End}(V)$, $\dim V < \infty$, χ_p zerfällt

mit N Sen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (paarweise versch.) in

Linearfaktoren. Bzgl. einer geeigneten Basis A von

$$V \text{ hat } A = M_A^A(p) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha_1 E_{n_1} + N_1} & & \\ & \boxed{\alpha_2 E_{n_2} + N_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{\alpha_k E_{n_k} + N_k} \end{pmatrix}$$

wobei die Matrizen $N_1, \dots, N_k$ nilpotent sind.