Will man den Ring K hervorheben (z.B. wenn mehrere Ringe vorkommen) schreibt man $V \otimes_K W$ und spricht dann vom Tensorprodukt von V und W über K.

05.06.08 <u>Wiederholung:</u>

K kommutativer Ring mit 1, V, W zwei K-Moduln.
Das Tensorprodukt $T = V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abb $\tau: V \times W \to T$ ist ein K-Modul mit folgender universeller Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} & K^{(V\times W)} \arrow[d, "p"] \\ V\times W \arrow[ur, dashed, "\delta"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\forall\varphi \text{ bilinear}"'] & T \arrow[d, "\exists\Phi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\to e_{(v,w)}$$

$$T = \underbrace{K^{(V\times W)} / \langle e_{(v_1+v_2,w)} - e_{(v_1,w)} - e_{(v_2,w)},\ e_{(v,w_1+w_2)} - e_{(v,w_1)} - e_{(v,w_2)},\ e_{(\lambda v,w)} - \lambda e_{(v,w)},\ e_{(v,\lambda w)} - \lambda e_{(v,w)} \mid v_1, v_2, w, w_1, w_2, \lambda \rangle}_{K^{(V\times W)}/U}$$

$$\tau(v,w) = e_{(v,w)} + U$$
$$= v \otimes w = v \otimes_K w$$

5.17 Satz und Definition

Seien $f: V_1 \to V_2$ und $g: W_1 \to W_2$ zwei K-Modulhomomorphismen. Dann gibt es genau einen K-Modulhomomorphismus

$$V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2 \quad \text{(Bezeichnung } f \otimes g\text{)}$$

sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times W_1 \arrow[r] \arrow[d, "f\times g"] & V_1 \otimes W_1 \arrow[d, "f\otimes g"] \\ V_2 \times W_2 \arrow[r] & V_2 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

kommutiert.

<u>Beweis:</u>

$$\begin{tikzcd} V_1 \times W_1 \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ V_2 \times W_2 \arrow[r] & V_2 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

φ ist bilinear, faktorisiert also eindeutig

$$\begin{tikzcd} V_1 \times W_1 \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & V_1 \otimes W_1 \arrow[d, "\exists! \phi =: f\otimes g"] \\ & V_2 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

Es gilt: $(f\otimes g)(v_1\otimes w_1) = f(v_1)\otimes g(w_1)$ ■

5.18 Zusatz

Sind f und g surjektiv, dann ist auch $f\otimes g$ surjektiv.

Beweis:

Sei $v_2\otimes w_2 \in V_2\otimes W_2$ ein "zerlegbares Element" und $v_1\in f^{-1}(v_2)$, $w\in g^{-1}(w_2)$. Dann gilt

$$(f\otimes g)(v_1\otimes w_1) = v_2\otimes w_2$$

Also alle zerlegbaren Elemente liegen im Bild und damit auch alle endlichen Summen von solchen, d.h. alle Elemente von $V_2\otimes W_2$ liegen im Bild.

5.19. Satz

Das Tensorprodukt vertauscht mit beliebigen direkten Summen. Genauer:

Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von K-Moduln und W ein weiterer. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie:

$$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right)\otimes W \cong \bigoplus_{i\in I}(V_i\otimes W)$$

Eine analoge Aussage gilt für das zweite Argument im $\otimes$-Produkt.

Beweis:

Wir betrachten die Inklusion

$$u_i : V_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i$$

und die Tensorprodukte

$$u_i\otimes id_W : V_i\otimes W \to \left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right)\otimes W$$

Nach der universellen Eigenschaft der direkten Summe gibt es genau ein Homomorphismus $\bigoplus_{i\in I}[V_i\otimes W]\to\left[\bigoplus_{i\in I}V_i\right]\otimes W$

$$\begin{tikzcd}
V_i\otimes W \arrow[r, hook] \arrow[dr, "u_i\otimes id_W"'] & \bigoplus_{i\in I}(V_i\otimes W) \arrow[d, "\Phi"] \\
 & (\bigoplus V_i)\otimes W
\end{tikzcd}$$

wegen der universellen Eigenschaft von $\oplus$

Für eine umgekehrte Abbildung betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus_{i\in I} V_i)\times W \arrow[r] \arrow[rrd] & (\bigoplus_{i\in I} V_i)\otimes W & \\
V_i\times W \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[ru, "\text{alle bilinear}"] \arrow[rr, bend right, "\text{universelle Eigenschaft von } \oplus \text{ auf alle diese angewendet}"'] & V_i\otimes W \arrow[u] \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I}(V_i\otimes W) \arrow[lu, "\Psi"']
\end{tikzcd}$$

Dienstag

zu den $(\bigoplus V_i)\otimes W$ gibt es ein Ψ. Φ und Ψ sind invers zueinander.

$V_i\otimes W$

<u>Bemerkung</u>

$\otimes$ vertauscht im Allgemeinen nicht mit $\prod_{i\in I} V_i$

$$\prod_{i\in I}(V_i\otimes W) \qquad (\prod_{i\in I} V_i)\otimes W$$
$$\Psi \qquad\qquad \Psi$$
$$(v_i\otimes w_i)_{i\in I} \qquad (v_i)_{i\in I}\otimes w$$

$\sum_{\text{ende.}}(v_{ij}\otimes w_{ij})$ allgemeines Element $\sum_{\substack{\text{ende.}\\ j}}(v_{ij})\otimes w_j$

Links haben wir möglicher Weise unendlich viele w_{ij}, rechts in jedem Element nur endlich viele w_j.

<u>**5.20 Satz:**</u>

Sei V ein bel. K-Modul. Dann gilt
$$K\otimes V \cong V$$

<u>Beweis:</u>

Wir betrachten die Abb.
$$\mu: K\times V\to V,\ (\lambda,v)\mapsto \lambda\cdot v$$
ist bilinear, also faktorisiert sie über

$$\begin{tikzcd}
K\times V \arrow[r, "\exists"] \arrow[rd, "\mu"'] & K\otimes V \arrow[d, "\varphi"] \\
& V
\end{tikzcd}$$

φ ist surjektiv und injektiv, da aus $0=\varphi(\sum_{\text{ende}}\lambda_i\otimes v_i)=\sum\lambda_i v_i$

also $\sum_{\text{ende.}}\lambda_i\otimes v_i=\sum_{\text{ende.}}1\otimes\lambda_i v_i$

$$1\otimes\sum_{\text{ende}}\lambda_i v_i = 1\otimes 0 = 0(1\otimes 0)=0$$

Also φ ist ein Isomorphismus

<u>**5.21 Korollar:**</u>

a) Für zwei freie Moduln $K^{(I)}, K^{(J)}$ gilt $K^{(I)}\otimes K^{(J)}\cong K^{(I\times J)}$

Genauer sind e_i, $i\in I$ die Basis von $K^{(I)}$ und e_j, $j\in J$ die

Basis von $K^{(J)}$, dann bilden $e_i \otimes e_j$, $\underset{(i,j) \in I \times J}{i \in I, j \in J}$ eine Basis von $K^{(I)} \otimes K^{(J)}$

b) Ist $x_1, ..., x_n$ ein Erzeugendensystem von V und $y_1, ..., y_m$ ein Erzeugendensystem von W, dann sind die Elemente $x_i \otimes w_j$ $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ ein Erzeugendensystem von $V \otimes W$.

Beweis:

a) folgt aus dem Vertauschen von $\oplus$ mit $\otimes$

$$K^{(I)} \otimes K^{(J)} \cong (\bigoplus_{i \in I} K) \otimes K^{(J)} \cong \bigoplus_{i \in I} K \otimes K^{(J)}$$

$$\cong \bigoplus_{i \in I} K \otimes (\bigoplus_{j \in J} K) = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J} K \otimes K = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J} K$$

$$= \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} K = K^{(I \times J)}$$

b) Ist $x_1, ..., x_n$ ein Erzeugendensystem gibt es eine Surjektion

$$f: K^n \to V, \ e_i \to x_i$$

Analog $g: K^m \to W$ und damit eine Surjektion

$$f \otimes g: K^n \otimes K^m \to V \otimes W$$

Dabei wird $e_i \otimes e_j$ auf $x_i \otimes y_j$ abgebildet.

Diese Elemente erzeugen. ■

Korollar:

Für K ein Körper und V, W K-Vektorräume der Dimension $n, m < \infty$ gilt: $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W = n \cdot m$ ■

Beispiel:

$K = \mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $W = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = ?$$

Sei $\bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\bar{1} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die Erzeuger als $\mathbb{Z}$-Modul.

Dann ist $\bar{1} \otimes \bar{1}$ ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\bar{1} \otimes \bar{1} = 1(\bar{1} \otimes \bar{1}) = (3-2) \cdot (\bar{1} \otimes \bar{1})$$

$$= 3(\bar{1} \otimes \bar{1}) - 2(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \bar{1} \otimes (3 \cdot \bar{1}) - (2 \cdot \bar{1}) \otimes \bar{1}$$

$$= \bar{1} \otimes 0 - 0 \otimes \bar{1} = 0(\bar{1} \otimes \bar{1}) - 0(\bar{1} \otimes \bar{1}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = 0$$

Beispiel:

K Körper, $V_1 = K^n, V_2 = K^m$ $\quad f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ gegeben durch
$W_1 = K^s, W_2 = K^t$ $\quad$ eine $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$
$g \in \mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ gegeben durch
eine $t \times s$-Matrix $B = (b_{kl})$

$$f \otimes g \in \mathrm{Hom}(V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2)$$

Wie sieht die Beschreibung von $f \otimes g$ durch Matrizen aus?

Bzgl. der Standardbasen von V_1, W_1, e_j, e_l und e_i', e_k' von V_2 und W_2 haben wir Basen $\quad e_j \otimes e_l \quad \begin{smallmatrix} j=1,\dots,n \\ l=1,\dots,s \end{smallmatrix}$

$$e_i' \otimes e_k' \quad \begin{smallmatrix} i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,t \end{smallmatrix}$$

$$e_j \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i', \quad e_l \mapsto \sum_{k=1}^{t} b_{kl} e_k'$$

$$e_j \otimes e_l \mapsto \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{t} a_{ij} b_{kl} e_i' \otimes e_k'$$

Diese Abbildung wird durch die Matrix

$$A \otimes B = (a_{ij} b_{kl})_{\substack{(i,k) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,t\} \\ (j,l) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,s\}}} \in K^{(mt) \times (ns)}$$

dargestellt.

Bzgl. einer geeigneten Durchnummerierung der Paare $(i,k), (j,l)$ ist

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} B & \cdots & a_{1n} B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} B & \cdots & a_{mn} B \end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Tensor $t = \sum_{j,l} x_{jl} e_j \otimes e_l$ wird auf

$$(f \otimes g)(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{s} a_{ij} b_{kl} x_{jl} e_i' \otimes e_j'$$ abgebildet.