

10.06.08

Wiederholung:

$$(\bigoplus_{i \in I} V_i) \otimes W \cong \bigoplus_{i \in I} (V_i \otimes W)$$

$$u_i \otimes v \mapsto v_i \otimes w \rightarrow (\bigoplus V_i) \otimes W$$

$\uparrow$
 $\searrow$
 $\bigoplus (V_i \otimes W)$

Für die Umkehrung suchen wir eine bilineare Abb.

$$(\bigoplus V_i) \times W \rightarrow \bigoplus (V_i \otimes W)$$

↳ $w \in W$ haben wir eine lineare Abb.

$$v_i \times \{w\} \rightarrow V_i \otimes W \rightarrow \bigoplus (V_i \otimes W)$$

$\searrow$
 $\rightarrow (\bigoplus V_i) \times \{w\} \rightarrow$

→ Haben wir eine Abb.

$$(\bigoplus V_i) \times W \rightarrow \bigoplus (V_i \otimes W) \text{ bilinear}$$

$$\uparrow$$

$\searrow$
 $(\bigoplus V_i) \otimes W$ ist die Umkehrabb.

5.22. Warnung:

Für Moduln über beliebigen Ringen R kann das Tensorprodukt zwei injektiver linearer Abb. f, g nicht surjektiv sein.

Beispiel:

$$R = \mathbb{Z}, f: \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}, n \mapsto 2n, g = id_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f \otimes g} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$1 \otimes \bar{1} \mapsto 2 \otimes \bar{1} = 2(1 \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 2 \cdot \bar{1} = 1 \otimes 0 = 0.$$

Bemerkung

V, W zwei Vektorräume, die einfachsten Funktionen auf

V sind Elemente $\psi \in V^*$. $\psi: V \rightarrow K$

$\phi \in V^*, \psi \in W^* : \psi: W \rightarrow K, y \mapsto \psi(y)$

$$V \times W \rightarrow K$$

$$(x, y) \mapsto \phi(x) + \psi(y)$$

$$\phi + \psi \in (V \oplus W)^*$$

2. te Methode

$$\begin{aligned} V \times W &\rightarrow K \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x) \cdot \psi(y) \end{aligned}$$

Der Raum der Funktionen auf $V \times W$, welcher von solchen Produkten erzeugt wird ist $V^* \otimes W^*$

§6 Multilinearformen und Tensoralgebra

6.1. Definition

Sei K ein kommutativer Ring mit 1.

$V_1, \dots, V_n$ und W seien K -Modulen.

Eine Abbildung $\varphi: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ heißt multilinear, wenn φ linear in jeder Komponente ist,

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu v_i'', v_{i+1}, \dots, v_n) \\ = \lambda \varphi(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) + \mu \varphi(v_1, \dots, v_i'', v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

6.2. Definition

K komm. Ring mit 1, $V_1, \dots, V_n$ K -Modulen.

Das Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_n$ ist ein K -Modul T zusammen mit einer multilinearen Abbildung

$$\tau: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow T$$

welche folgende universelle Eigenschaft haben:

← Multilinearen Abb. $\varphi: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ existiert eine eindeutig bestimmte K -lin. Abb. $\underline{\varphi}: T \rightarrow W$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\tau} & T \\ \searrow \varphi & & \downarrow \exists! \underline{\varphi} \\ & & W \end{array} \text{ kommutiert.}$$

6.3. Satz

Das Tensorprodukt (T, τ) ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & T & \\
 \tau \swarrow & & \searrow \\
 V_1 \times \dots \times V_n & & T' \\
 & \Phi \downarrow & \\
 & T & \\
 & \Psi \uparrow & \\
 & T' & \\
 & \tau' \swarrow & \searrow \\
 & &
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \exists! \Phi: T \rightarrow T', \Psi: T' \rightarrow T$$

also: $\Psi \circ \Phi = \text{id}_T, \Phi \circ \Psi = \text{id}_{T'}$

6.4. Satz und Notation

Das Tensorprodukt T von $V_1, \dots, V_n$ existiert und wird mit $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ bezeichnet.

Beweis

Wir gehen genauso vor wie zuvor.

$$K^{(V_1 \times \dots \times V_n)} = \bigoplus_{(v_1, \dots, v_n) \in K^{(V_1 \times \dots \times V_n)}} e_{(v_1, \dots, v_n)}$$

Wir haben eine Abbildung

$$V_1 \times \dots \times V_n \xrightarrow{e} K^{(V_1 \times \dots \times V_n)}, (v_1, \dots, v_n) \mapsto e_{(v_1, \dots, v_n)}$$

Diese Abbildung ist nicht multilinear

Betrachte $U = \langle e_{(v_1, \dots, v_i + v_i'', \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)} - e_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i'', \dots, v_n)} \mid v_i \in \{1, \dots, n\}, v_i \neq v_i'', v_i, v_i'' \in V_i \rangle$

Setze $T = K^{(V_1 \times \dots \times V_n)} / U$

$$\begin{array}{ccc}
 & e \mapsto K^{(V_1 \times \dots \times V_n)} & \\
 & \downarrow \pi & \\
 V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{e} T & \\
 & \downarrow \Phi & \\
 & \omega & \\
 \uparrow \gamma & &
 \end{array}$$

$$\varphi(e_{(v_1, \dots, v_n)}) := \varphi(v_1, \dots, v_n)$$

Da φ multilinear ist, liegt $\ker \varphi \supset U$.

$\Rightarrow \exists$ wohldefinierte Abbildung

$$\Phi: T \rightarrow \omega$$

Φ ist eindeutig bestimmt, da $\Phi(e_{(v_1, \dots, v_n)} + U) = \varphi(v_1, \dots, v_n)$

Das Bild von $e_{(v_1, \dots, v_n)} \in T = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ bezeichnen wir mit $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$.

6.5. Satz: (Assoziativität des Tensorprodukts)

V_1, V_2, V_3 K -Modulen. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\cong} V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$

Beweis:

Die Abbildung

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 \times V_3 &\rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ (x, y, z) &\mapsto x \otimes y \otimes z \end{aligned}$$

ist für festes $z \in V_3$ bilinear in x und y

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 \times \{z\} &\rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ &\searrow \quad \nearrow \\ &V_1 \otimes V_2 \otimes \{z\} \end{aligned}$$

Dies haben wir $\forall z \in V_3$

$$\begin{aligned} (V_1 \otimes V_2) \times V_3 &\rightarrow (V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \\ &\searrow \quad \nearrow \\ &(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Umgekehrt } V_1 \times V_2 \times V_3 &\rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x \otimes y) \otimes z \end{aligned}$$

ist multilinear. Dies gibt eine Abb.:

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 \times V_3 &\begin{cases} \nearrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ \searrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \end{cases} \\ &\quad \updownarrow \\ &\quad V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \end{aligned}$$

Die Pfeile sind Isomorphismen wegen der Eindeutigkeit der Homomorphismen in den universellen Eigenschaften.

6.6 Definition

Sei V ein fester K -Modul. Dann bezeichnet zu $n \geq 1$

$$T^n(V) = V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V$$

Dann gibt $V^{\otimes n} \times V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes(n+m)} \cong V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m}$

den K -Modul $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ eine Algebrastruktur.

Dabei ist $V^{\otimes 0} = K$ und $1 \in K \subset T(V)$ ist das Einselement dieser Algebra.

$T(V)$ ist assoziativ, wegen 6.5., aber nicht kommutativ.

$$x \otimes y \neq y \otimes x$$

Der Isomorphismus

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 &\rightarrow V_1 \otimes V_2 \\ \downarrow &\quad \downarrow \\ V_2 \times V_1 &\rightarrow V_2 \otimes V_1 \end{aligned}$$

sagt nicht, dass die Algebra kommutativ ist.

Ist $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V , dann sind $e_i \otimes e_j, i, j=1, \dots, n$ eine Basis von $V^{\otimes 2}$. Insbesondere $e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$.

Im Falle $K = \text{Körper}$, $\dim V = 1$, etwa $e \in V$ eine Basis, dann gilt $T(V) \cong K[t]$

Historisch sind Tensoren als erstes in der Physik aufgetreten.

$$V \text{ } \mathbb{R}\text{-}V, V^*$$

$$t \in T^{p,q}(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$$

q -fach kovariant und p -fach kontravariant-Tensor.

$$g \in GL(V) = \{f \in \text{Hom}(V, V) \mid f \text{ Isomorphismus}\}$$

$$t = u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_q$$

$$\text{dann gilt } g(t) = g(u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_q) = g(u_1) \otimes \dots \otimes g(u_p) \otimes g^{-1}(\omega_1) \otimes \dots \otimes g^{-1}(\omega_q)$$

Selbst für kleine Vektorräume $\dim V = 3, 4, p = 1, 2, q = 1, 2$

ist dies als Summe ausgeschrieben ein beachtlicher Ausdruck.

Wir haben also ein Gruppenhomomorphismus

$$GL(V) \rightarrow GL(T^{p,q}(V)) \text{ die "Tensordarstellung" der Gruppe.}$$

6.7. Die äußere Algebra

Definition:

Eine multilineare Abbildung

$$V \times V \times \dots \times V \rightarrow X^L$$

heißt alternierend, wenn $\varphi(v_1, \dots, v_n) = 0$ $\forall (v_1, \dots, v_n)$ mit $v_i = v_j$ für $i \neq j$.

Bemerkung:

Für alternierende Multilinearformen gilt:

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, -v_j, \dots, v_n) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

Beweis:

$$0 = \varphi(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) = \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) + \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) + \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

12.06.08

Die äußere Algebra

6.8. Beispiel:

$V = K^n, K$ Körper

def: $\underbrace{V \times \dots \times V}_n \rightarrow K$

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$$

ist eine alternierende (multi-linear) Form, wobei $(v_1, \dots, v_n) \in K^{n \times n}$ die aus Spaltenvektoren gebildete Matrix bezeichnet.

6.9. Definition:

Sei V ein K -Modul, $k \in \mathbb{N}$.

Die k -te äußere Potenz von V ein K -Modul

$\Lambda^k V$ zusammen mit einer alternierenden Abb.

$\lambda: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-fach}} \rightarrow \Lambda^k V$ mit folgender universeller

Eigenschaft: Für alle alternierenden Abb.

$\varphi: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-fach}} \rightarrow X$ in einen weiteren Modul X

existiert genau ein Homomorphismus $\phi: \Lambda^k V \rightarrow X$,
so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-fach}} & \xrightarrow{\lambda} & \Lambda^k V \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \phi \\ & & X \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

6.10 Bemerkung

Durch die universelle Eigenschaft ist $(\Lambda^k V, \lambda)$ bis auf kanonische Isomorphie festgelegt.

$$\begin{array}{ccc} V^k & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^k V \\ \lambda \downarrow & \searrow \lambda' & \downarrow \exists! \phi_1 \\ \Lambda^k V & \xrightarrow{\quad} & (\Lambda^k V)' \\ & \nwarrow \exists! \phi_2 & \uparrow \text{id} \end{array}$$

6.11. Satz + Notation

Die k -te äußere Potenz $\Lambda^k V$ existiert. Das Bild von $(v_1, \dots, v_k) \in V \times \dots \times V$ unter λ wird mit $\lambda(v_1, \dots, v_k) = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ bezeichnet.

Beweis:

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, faktoriert die Abb. λ (wenn es sie gibt) über

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{\tau} & V^{\otimes k} \\ \downarrow \lambda & \searrow & \downarrow \\ \Lambda^k V & & \end{array}$$

da alternierende Abb. insbesondere multilineare sind.

Wir werden nun $\Lambda^k V$ als einen Quotienten von $V^{\otimes k}$ konstruieren. Sei $U \subset V^{\otimes k}$ der Untermodul, der von allen Tensoren der Gestalt

$v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes v \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes v \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_k$ erzeugt wird, also solche die an der i -ten und j -ten Stelle die gleiche Komponente haben. Dabei durchläufen $v_1, \dots, v_k \in V$ und $1 \leq i < j \leq k$.

Wir definieren: $\Lambda^k V := V^{\otimes k} / U$

Die Komposition:

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{\tau} & V^{\otimes k} \\ \downarrow \lambda & \searrow & \downarrow \text{pr} \\ \Lambda^k V & & U \end{array}$$

ist alternierend nach Wahl von U .

Ist $\varphi: V \times \dots \times V \rightarrow X$ eine weitere alternierende Abb., so ist sie insbesondere multilineare. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts faktoriert φ über $V^{\otimes k}$:

$$\begin{array}{ccccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{\tau} & V^{\otimes k} & \xrightarrow{\omega} & \Lambda^k V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \hat{\varphi} & & \downarrow \phi \\ X & & X & & X \end{array}$$

da φ alternierend ist liegen sämtliche Erzeuger von U in $\ker \hat{\varphi}$.

$\hat{\varphi}$ faktoriert über einen eindeutig bestimmten Morphismus $\phi: \Lambda^k V \rightarrow X$ nämlich durch:

$$\phi(\ell + u) := \hat{\varphi}(\ell) \quad (\text{wohldef.})$$

6.12. Bemerkung

$\wedge^k V$ wird von den Elementen $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \wedge^k V$ erzeugt. Ein beliebiges Element $\alpha \in \wedge^k V$ ist eine endliche Summe von solchen Elementen. Neben der Multilinearität gelten nach Def. die Regeln:

- 1) $v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge \omega \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_{j-1} \wedge \omega \wedge v_{j+1} \wedge \dots \wedge v_k = 0$ und
- 2) $v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_k = -v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k$.

6.13. Satz

Seien V, W zwei K -Modulen und $\varphi: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abb. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte k -lineare Abb. $\wedge^k \varphi: \wedge^k V \rightarrow \wedge^k W$ die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overset{\text{u-fach}}{\varphi \times \dots \times \varphi} & \xrightarrow{\quad} & \wedge^k V \\ \downarrow \varphi & \searrow \wedge^k \varphi & \\ W & \xrightarrow{\quad} & \wedge^k W \end{array} \quad \text{kommutativ macht!}$$

Beweis:

Wir betrachten die Komposition $\wedge^k(\varphi \times \dots \times \varphi)$ ist alternierend. Also ist $\wedge^k \varphi$ eindeutig nach der universellen Eigenschaft von $\wedge^k V$ definiert. ■

6.14. Satz

Sei K Körper und $V = K^n$ ein n -dim K -VR mit Basis $e_1, \dots, e_n$. Dann ist $\wedge^k V$ ein $\binom{n}{k}$ -dimensionales K -VR mit Basis $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

Beweis:

Nach dem vorherigen Kapitel bilden die Tensoren $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$ mit $1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_k \leq n$ eine Basis von $V^{\otimes k}$.

Wendet man die Regeln 6.12 an, so sieht man, dass die Elemente $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \in \wedge^k V$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ mindestens ein Erzeugendensystem von $\wedge^k V$ bilden. Um einzusehen, dass diese Elemente eine Basis bilden, betrachten wir für ein festes k -Tupel

$I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ die Teilmenge
 $V = K^n = \langle e_j \mid j \in I \rangle \oplus \langle e_j \mid j \notin I \rangle$
 und die Projektion

$$P_I: V \rightarrow W_I := \langle e_j \mid j \in I \rangle$$

$$e_j \mapsto e_j \text{ für } j \in I$$

$$e_j \mapsto 0 \text{ für } j \notin I$$

Fassen wir die Elemente von W_I als Spaltenvektoren bzgl. der Basis $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ auf, so sehen wir dass die Determinante

$$\det W_I: K \times \dots \times W_I \rightarrow K$$

$$(w_1, \dots, w_k) \mapsto \det(w_1, \dots, w_k)$$

eine nichttriviale alternierende Abb. $W_I \times \dots \times W_I \rightarrow K$ definiert. Also gibt es eine nichttriviale Abbildung $\Lambda^k W_I \xrightarrow{\det} K$.

Wir haben also ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overset{\text{alternierend}}{\Lambda^k K^n} & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^k V \\ P_I \times \dots \times P_I \downarrow & & \downarrow \text{GL} \\ W_I \times \dots \times W_I & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^k W_I \xrightarrow{\det} K \end{array}$$

Die Komposition $\Lambda^k V \rightarrow \Lambda^k W_I \rightarrow K$ liefert die Summe $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mapsto \lambda_{i_1, \dots, i_k}$ den Koeff. von $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$.

Dies zeigt, dass $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ von allen anderen Erzeugern linear unabh. ist. Es folgt $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ bilden eine Basis $\Lambda^k V$.

6.15. Bemerkung

Die Aussage von 6.14 ist auch für beliebige freie Modulen R^n über einem bel. kommutativen Ring R sinngemäß richtig.

6.16. Korollar

Sei V ein endl. dim. K -VR. Dann ist

$$\dim_K V = \max \{k \in \mathbb{N} \mid \Lambda^k V \neq 0\}$$

Beweis:

Sei $n = \dim_K V$. Wir haben gerade gezeigt, dass

$$\dim_K \Lambda^n V = \binom{n}{n}, \text{ also folgt:}$$

$$\max \{k \mid \Lambda^k V \neq 0\} = \max \{k \mid \binom{n}{k} \neq 0\} = n = \dim_K V$$

Insbesondere ist $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $\Lambda^n V$. ■

6.17 Korollar:

Sei $V = K^n$ K -VR, $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \in V$, $i=1, \dots, k$
von k Vektoren aus V und $A = (a_{ij}) \in K^{k \times n}$ die Matrix
der Koeffizienten. Dann gilt:

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n \\ J = \{j_1, \dots, j_k\}}} \det A_J \cdot e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}, \text{ wobei}$$

$A_J = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, k \\ j \in J}}$ die $k \times k$ Teilmatrix von A bezeichnet

aus den Spalten $j_1, \dots, j_k$.

Beweis:

Sei J fest. Wir betrachten wie oben die Projektion

$$P_J: V \rightarrow W_J \\ e_i \mapsto e_i \text{ f\"ur } i \in J \text{ und definieren die Abb.} \\ e_i \mapsto 0 \text{ sonst}$$

$$\begin{aligned} (\Lambda^k P_J)(v_1, \dots, v_k) &= P_J(v_1) \wedge \dots \wedge P_J(v_k) \\ &= \left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} e_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^n a_{kj_k} e_{j_k} \right) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) (a_{1\omega_{j_1}} \dots a_{k\omega_{j_k}}) \right) e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \end{aligned}$$

(nach der Multilinearität und der Alternierendheit)

$$= (\det A_J) e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$$

Koeffizientenvergleich (für alle P_J) liefert die

Behauptung. ■

6.18 Satz

Sei V ein n -dim. K -VR, $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann sind äquivalent:

1) $0 = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k V$

2) $v_1, \dots, v_k$ sind linear abhängig.

Beweis:

Wir stellen die Vektoren v_i als LK der Basisvektoren dar: $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, $A = (a_{ij})$. Dann gilt:

$v_1, \dots, v_k$ sind lin. unabh. $\Leftrightarrow \text{Rang } A = k$

$\Leftrightarrow \det A_J \neq 0$ für wenigstens eine k -elementige Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$

$\Leftrightarrow v_1, \dots, v_k$ hat wenigstens eine von Null verschiedenen Koeff. in der Darstellung als LK der Basisvek von $\wedge^k V \Leftrightarrow v_1, \dots, v_k \neq 0$.

17.06.08

6.19. Definition

Sei V ein K -Modul. Dann bezeichnet

$$\wedge V = \wedge^0 V = \bigoplus_{k=0}^n \wedge^k V$$

wobei $\wedge^0 V := K$.

Wir wollen $\wedge V$ zu einer Algebra machen.

Ist V ein n -dim'L Vektorraum mit Basis

$$e_1, \dots, e_n.$$

Dann ist $\wedge V = \wedge^0 V \oplus \wedge^1 V \oplus \wedge^2 V \oplus \dots \oplus \wedge^n V$ ein Vektorraum mit Basis

$$e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

wobei $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ alle Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft. Speziell: $e_\emptyset = 1 \in K = \wedge^0 V$
also $\dim_{K-V} \wedge V = 2^n$

Um die Algebrastruktur auf $\wedge V$ zu definieren können wir zum Beispiel angeben, was das Produkt der Basiselemente ist.

Für $e_I e_J$, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $J = \{j_1, \dots, j_\ell\}$
 $e_I e_J = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_\ell}$

Also

$$e_I e_J = \begin{cases} 0 & \text{falls } I \cap J \neq \emptyset \\ \pm e_{I \cup J} & \text{falls } I \cap J = \emptyset \end{cases}$$

wobei das Vorzeichen von der Parität der Vertauschung

abhängt, die wir brauchen, um die Indizes von $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_e}$ in aufsteigende Reihenfolge zu bringen.

6.20.

Man kann die äußere Algebra auch basisfrei einführen.

Satz

Sei V ein K -Modul. Dann gibt es genau eine beliebige Abbildung

$$\mu: \Lambda^k V \times \Lambda^e V \rightarrow \Lambda^{k+e} V$$

die $\mu(x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_e) = x_1 \wedge \dots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_e$
 $\leftrightarrow x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_e \in V$ erfüllt.

Beweis

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_k \times \underbrace{V \times \dots \times V}_e \rightarrow \Lambda^{k+e} V, (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_e) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_e$$

Für ein festes Tupel $(x_1, \dots, x_k) \in \underbrace{V \times \dots \times V}_k$ ist die Abbildung alternierend multilinear in den y . Sie faktorisiert also $\Lambda^e K$

$$\begin{array}{ccc} & & \Lambda^e V \\ & \nearrow & \downarrow \varphi(x_1, \dots, x_k) \\ \underbrace{V \times \dots \times V}_e & & \Lambda^{k+e} V \end{array}$$

Die Abbildung

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^e V, \Lambda^{k+e} V)$$

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

ist ebenfalls alternierend und multilinear. Also diese faktorisiert über:

$$\varphi: \Lambda^k V \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^e V, \Lambda^{k+e} V)$$

Die gewünschte Abbildung:

$$\mu: \Lambda^k V \times \Lambda^e V \rightarrow \Lambda^{k+e} V$$

definieren wir durch

$$\mu(t, s) = \varphi(t)(s), \text{ wobei } t \in \Lambda^k V, s \in \Lambda^e V$$

speziell für $t = x_1 \wedge \dots \wedge x_k$, $s = y_1 \wedge \dots \wedge y_e$ gilt

$$\mu(t \wedge s) = x_1 \wedge \dots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_e$$

und μ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. ■

6.21.

durch lineare Fortsetzung erhalten wir eine Abbildung: $\wedge = \wedge: \wedge V \times \wedge V \rightarrow \wedge V$

das sogenannte $\wedge$ -Produkt (Dach-Produkt).

Satz (Eigenschaften des $\wedge$ -Produkts)

- 1) $\wedge$ ist assoziativ $(t_1 \wedge t_2) \wedge t_3 = t_1 \wedge (t_2 \wedge t_3)$
- 2) $\wedge \in K = \wedge^0 V \subset \wedge V$ ist ein Einselement
- 3) $\wedge$ -Produkt ist distributiv über der Addition
- 4) Das $\wedge$ -Produkt erfüllt:

$$t \wedge s = (-1)^{ke} s \wedge t \quad \text{für } t \in \wedge^k V, s \in \wedge^e V$$

für homogene Elemente. Man spricht auch von "strikt oder graduieret kommutativ."

Beweis

3) ist klar, wegen der Bilinearität von $\wedge^k V \times \wedge^e V \rightarrow \wedge^{k+e} V$ und der Definition durch lineare Fortsetzung.

1) Es genügt dies für Elemente der Gestalt

$$t_1 = x_1 \wedge \dots \wedge x_k, t_2 = y_1 \wedge \dots \wedge y_e, t_3 = z_1 \wedge \dots \wedge z_n$$

nachzurechnen:

$$\begin{aligned} (t_1 \wedge t_2) \wedge t_3 &= (x_1 \wedge \dots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_e) \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_n \\ &= x_1 \wedge \dots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_e \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_n \\ &= (x_1 \wedge \dots \wedge x_k) \wedge (y_1 \wedge \dots \wedge y_e \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_n) \\ &= t_1 \wedge (t_2 \wedge t_3) \end{aligned}$$

2) folgt, da $\wedge^0 V \times \wedge^k V \rightarrow \wedge^k V$, das Element $(1, t) \mapsto t$ abbildet.

4) Es reicht $t = x_1 \wedge \dots \wedge x_k \in \wedge^k V$ und $s = y_1 \wedge \dots \wedge y_e \in \wedge^e V$ zu betrachten.

$$t \wedge s = x_1 \wedge \dots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_e = x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} \wedge y_1 \wedge x_k \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_e$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{e_{x_1, 1} \dots x_u - 1} x_u - 1 y_1 x_1 \dots x_u \\
 &= (-1)^{e_k} y_1 x_1 \dots x_u - 1 y_1 x_1 \dots x_u = (-1)^{e_k} s_1 t.
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

6.22.

Zu jedem K -Modul V existiert eine assoziative strikt kommutative Algebra

$$(\Lambda V, +, \cdot)$$

die äußere Algebra von V .

Ferner: Zu $\varphi: V \rightarrow W$ ein K -Modulhomomorphismus

$$\text{geben } \bigoplus \Lambda^k \varphi: \Lambda V = \bigoplus \Lambda^k V \rightarrow \Lambda W = \bigoplus \Lambda^k W$$

einen Algebrahomomorphismus

$$\Lambda^k \varphi: \Lambda^k V \rightarrow \Lambda^k W$$

Speziell für einen n -dim K -VR V mit Basis $e_1, \dots, e_n$

ist ΛV ein 2^n -dim K -VR mit Basis e_I

$$I = \{i_1 < \dots < i_k\} \in 2^{\{1, \dots, n\}}$$

$$\text{und } e_I \wedge e_J = \begin{cases} \pm e_{I \cup J}, & I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einige Anwendungen der äußeren Algebra

6.23. Konzeptuelle Interpretation der Determinante

Sei V ein n -dim K -VR. Dann ist $\Lambda^n V$ ein 1-dim K -VR und

$$\Lambda^n \varphi \in \text{Hom}(\Lambda^n V, \Lambda^n V) = K$$

Da $\Lambda^n V$ 1-dimensional ist, ist

$$K \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^n V, \Lambda^n V)$$

$$\lambda \mapsto (x \mapsto \lambda x)$$

ein kanonischer Isomorphismus. Diese bietet

$$\text{Hom}(\Lambda^n V, \Lambda^n V) \rightarrow K$$

$$\Lambda^n \varphi \mapsto \det \varphi$$

6.24 Interpretation der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

Sei V ein n -dim K -VR, $\varphi \in \text{End}(V)$

$$\chi_{\varphi}(t) = (-t)^n + b_1(-t)^{n-1} + \dots + b_n \in K[t]$$

das charakteristische Polynom. Dann gilt:

$$b_k = \text{tr}(\wedge^k \varphi)$$

Beweis:

Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V und $A = M_{\varphi}^e(\varphi)$ die Matrixdarstellung

$$\chi_{\varphi}(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix} = \det(c_{ij})$$

Wir betrachten den Koeffizienten von $(-t)^{n-k}$ in der Summenentwicklung

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}$$

Summanden die zu $(-t)^{n-k}$ beitragen entsprechende Permutation σ die wenigstens $n-k$ Indizes festlassen. Also

$$b_k = \sum_{j=\{j_1, \dots, j_k\}} \det A_{j,j}$$

wobei $A_{j,j}$ die Matrix zu den Zeilen und Spalten ins j bezeichnet.

Andererseits gilt $e_j = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \xrightarrow{\wedge^k \varphi} \sum_{i_1, \dots, i_{n-k}} \det A_{i,j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-k}}$
Also $\det A_{j,j}$ ist der Koeffizient von e_j zu $\wedge^k \varphi(e_j)$
 $\Rightarrow b_k = \sum \det A_{j,j} = \text{tr}(\wedge^k \varphi)$

6.25. Satz (Determinantenentwicklung nach k -Spalten gleichzeitig)

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$, $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

Dann gilt

$$\det A = \sum_{I = \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \text{sgn} \begin{pmatrix} I & I^c \\ J & J^c \end{pmatrix} \det A_{J,J} \det A_{I^c, J^c}$$

Dabei bezeichnet $I^c = \{1, \dots, n\} \setminus I$ und $\begin{pmatrix} I & I^c \\ J & J^c \end{pmatrix}$

die Permutation $i_1 \mapsto j_1, i_2 \mapsto j_2, \dots$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 14 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 13 & 14 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

eine Summe aus $6 = \binom{4}{2}$ Termen.

Beweis:

Es gilt $e_i \mapsto \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$

und $e_1, \dots, e_n \mapsto (\sum_{j=1}^n a_{1j} e_j), \dots, (\sum_{j=1}^n a_{nj} e_j) = \det A \cdot e_1, \dots, e_n$

Es gilt

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} e_j \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^n a_{nj} e_j \right) = \operatorname{sgn} \left(\underbrace{j_1 \dots j_k}_{\mathcal{J}} \underbrace{j_{k+1} \dots j_n}_{\mathcal{J}^c} \right) \cdot \left[\sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \sum_{i_n=1}^n a_{ni_n} e_{i_n} \right]$$

$$= \operatorname{sgn} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\sum_{i_1 \in \mathcal{J}} \det A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \right) \wedge \left(\sum_{i_{k+1} \in \mathcal{J}^c} \det A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}^c} e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \right)$$

$$= \sum_{\substack{\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_k\} \\ \mathcal{I}^c = \{i_{k+1}, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{I}}} \operatorname{sgn} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{smallmatrix} \right) \det A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} \det A_{\mathcal{I}^c, \mathcal{J}^c} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

$$= \sum_{|\mathcal{I}|=k} \operatorname{sgn} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & n \\ \mathcal{J} & \mathcal{J}^c \end{smallmatrix} \right) \operatorname{sgn} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & n \\ \mathcal{I} & \mathcal{I}^c \end{smallmatrix} \right) \det A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} \det A_{\mathcal{I}^c, \mathcal{J}^c}$$

$$= \sum_{|\mathcal{I}|=k} \operatorname{sgn} \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{I} & \mathcal{I}^c \\ \mathcal{J} & \mathcal{J}^c \end{smallmatrix} \right) \det A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} \det A_{\mathcal{I}^c, \mathcal{J}^c} \quad \blacksquare$$