

19.6.08

§ 7 Grassmann-Kannigfaltigkeiten

Grassmann (1809-1877) hat die äußere Algebra eingeführt.

7.1. Definition

Sei $V = K^n$ und $1 \leq k \leq n$

$$G(k, n) = \{ U \subset V \mid U \text{ ist } k\text{-dimensionaler UVR} \}$$

heißt Grassmannsche der k -dim UVR von K^n .

Im Falle $k=1$ ist also

$$G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$$

Im Falle $k=n-1$ $G(n-1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$

Ähnlich wie im Falle vom projektiven Raum, wollen wir der Menge $G(k, n)$ zusätzliche Struktur geben: Karten, Koordinaten usw.

7.2.

Sei $U = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ für ein unabh. Vektoren $a_1, \dots, a_k \in K^n$
In Termen der Basis $e_1, \dots, e_n$ von K^n ist dann

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_k = \sum_{|I|=k} \det(A_I) e_I$$

wobei $A = (a_1, \dots, a_k) \in K^{n \times k}$ und $A_I \in K^{k \times k}$ die Untermatrix mit Zeilen $i_1, \dots, i_k$. $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$

7.3. Definition

Die Koeffizienten

$$(\det A_I)_{|I|=k} \in K^{\binom{n}{k}}$$

heißen Plückerkoordinaten des UVR $U = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$

Die Abbildung

$$G(k, n) \longrightarrow \mathbb{P}(V^k)$$

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle \longmapsto [a_1 \wedge \dots \wedge a_k]$$

heißt Plückerembettung der Grassmannschen.

Plücker (1801-1868)

Beispiel:

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$ hat Plückerkoordinaten

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \right) \\ = (-3, -6, -9, -3, -6, -3)$$

Wählen wir eine andere Basis von U , etwa

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ so erhalten wir:}$$

$(-1, -2, -3, -1, -2, -1)$ der gleiche Vektor bis auf ein Skalaresvielfaches.

7.4. Satz (Pfeilerembedding)

Die Abbildung $GL(k, n) \rightarrow \mathbb{P}(1^k V), (a_1, \dots, a_n) \mapsto [a_1, \dots, a_n]$ ist wohldefiniert und injektiv.

Beweis:

Sei $b_1, \dots, b_n$ eine andere Basis von $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $S \in GL(n, K)$, so dass

$$(b_1, \dots, b_n) = B = A \cdot S \in K^{n \times n}$$

Für die Pfeilerkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\det B_I)_{|I|=k} &= \det(A_I \cdot S)_{|I|=k} = (\det A_I \cdot \det S)_{|I|=k} \\ &= \det S \cdot (\det A_I)_{|I|=k} \end{aligned}$$

also $[b_1, \dots, b_n] = [a_1, \dots, a_n]$. Dies zeigt Wohldefiniertheit.

Für die Injektivität zeigen wir einen Hilfssatz.

7.5. Satz

Sei $u \in 1^k V$. u hat die Gestalt

$$u = a \wedge \omega \text{ mit } a \in V, \omega \in 1^{k-1} V$$

genau dann, wenn $a \in \ker(V \xrightarrow{\wedge u} 1^{k+1} V)$

Beweis:

Da $a \wedge a \wedge \omega = 0$ ist $a \in \ker$ notwendig.

Umgekehrt sei $a \in \ker(V \xrightarrow{\wedge u} 1^{k+1} V)$, $a \neq 0$

Wir ergänzen a zu einer Basis

$$a_1 = a, a_2, \dots, a_n \text{ von } V.$$

und schreiben $u \in 1^k V$ in der entsprechenden Basis

$$u = \sum_{|I|=k} \lambda_I a_I \quad \text{wobei } a_I = a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}$$

$$= \sum_{\substack{|I|=k \\ 1 \notin I}} \lambda_I a_I + \sum_{\substack{|I|=k \\ I = \{1\} \cup I'}} \lambda_I a_1 \wedge a_{I'}$$

$$0 = a_1 \wedge u = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k \\ 1 \notin I}} \lambda_I a_1 \wedge a_I + 0$$

→ alle Koeffizienten $\lambda_I = 0$ mit $1 \notin I$

$$\text{und } u = a_1 \wedge \sum_{\substack{I \subseteq \{2, \dots, n\} \\ |I|=k-1 \\ I = \{1\} \cup I'}} \lambda_I a_I \quad \blacksquare$$

Zurück zum Beweis von 7.4.:

Angenommen $[u] \in P(\wedge^k V)$ liegt im Bild von $G(k, n)$.

Nach dem Hilfssatz (Satz 7.5.):

$$a_1, \dots, a_k \in \ker(V \xrightarrow{\omega} \wedge^{k+1} V)$$

keine davon unabhängigen Vektoren liegen im Kern,

$$\text{also } U = \ker(V \xrightarrow{\omega} \wedge^{k+1} V)$$

dies zeigt die Injektivität.

Bemerkung:

Man nennt Vektoren $u \in \wedge^k V$ der Gestalt

$$u = a_1 \wedge \dots \wedge a_k \text{ auch } \underline{\text{vollständig zerlegbar.}}$$

Vollständig zerlegbare Vektoren entsprechen also Plückerkoordinaten von $U \in \mathbb{R}^2$.

Ist jeder Vektor zerlegbar?

7.6. Satz

Jeder Vektor $u \in \wedge^{n-1} V$ ist vollst. zerlegbar.

Beweis:

Da $\dim \wedge^{n-1} V = n$, hat $\ker(V \xrightarrow{\omega} \wedge^n V)$ Dimension (wenigstens) $n-1$. Außerdem für $u=0$ ist der Kern genau $(n-1)$ -dimensional, da u nicht 1 -Produkt von n Elementen ist. ■

Im Allgemeinen sind nicht alle Vektoren zerlegbar.

Beispiel:

$V = K^4$, $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ ist nicht zerlegbar

$$V \xrightarrow{\omega} \wedge^3 V$$

$$e_1 \mapsto e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$$

$$e_2 \mapsto e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

$$e_3 \mapsto e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

$$e_4 \mapsto e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$$

Also die Basis von V wird auf eine Basis von $\wedge^3 V$ abgebildet und $0 = \ker(U \xrightarrow{\wedge^3} \wedge^3 V)$.

7.2. Atlases von $G(k, n)$

Wie $\mathbb{P}^n$ lässt sich $G(k, n)$ durch Karten überdecken:

Zu $I \subset \{1, \dots, n\}$ bezeichne

$$U_I = \{[u] = [\sum_{j \neq i} \lambda_j e_j] \mid \lambda_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}(\wedge^k V)$$

und $\varphi_I : U_I \xrightarrow{\cong} K^{(n-k)+1}$
 $(\lambda_j) \mapsto \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \mid j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \right)$ die entsprechende Karte des projektiven Raums.

$V_I = U_I \cap G(k, n) \subset \mathbb{P}(\wedge^k V)$ besteht aus Unterräumen $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, so dass die i -te Plückerkoordinate $\det A_i \neq 0$. Basiswechsel im Unterraum

$B = A \cdot A_i^{-1}$ liefert eine $n \times k$ -Matrix mit

$$B_i = E_k.$$

Zum Beispiel: Für $I = \{1, \dots, k\}$ hat B die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ b_{k+1,1} & \dots & b_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k+1,k} & \dots & b_{n,k} \end{pmatrix}$$

Solche Unterräume hängen also von $\binom{n-k}{k}$ Koeffizienten ab und

$$\begin{aligned} V_{\{1, \dots, k\}} &\longrightarrow K^{\binom{n-k}{k}} \\ \langle b_{k+1,1}, \dots, b_{n,1} \rangle &\longmapsto (b_{ij})_{\substack{i=k+1, \dots, n \\ j=1, \dots, k}} \end{aligned}$$

Analog für andere $I \subset \{1, \dots, n\}$

In $U_{\{1, \dots, n\}} \subset \mathbb{P}(\wedge^k V)$ ist $V_{\{1, \dots, n\}}$ der Graph der Abbildung $K^{\binom{n-k}{k}} \ni (b_{k+1,1}, \dots, b_{n,k}) \rightarrow$ Plückerkoordinaten von B , denn unter den Plückerkoordinaten von B tauchen alle b_{ij} , $i \geq k+1$ auf.

Insbesondere ist für $K = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) $V_I \subset U_I$ abgeschlossen.

und deshalb $G_{\mathbb{R}}(k,n) \subset \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ kompakt.

Als Mannigfaltigkeit hat

$G_{\mathbb{R}}(k,n)$ die Dimension $k(n-k)$ während
 $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ " " $\binom{n}{k}-1$ hat.

Der erste Fall wo $G(k,n) \neq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ ist $n=4, k=2$.

7.8 Geometrie von $G(2,4)$

Die Menge $G(2,4)$ lässt sich auch mit der Menge
 $\{L \subset \mathbb{P}^3 \mid L \text{ Gerade}\}$ identifizieren. Also

$G_{\mathbb{R}}(2,4) \cong \{L \subset \mathbb{R}^3 \mid L \text{ Gerade}\}$ die Menge der
Geraden im Anschauungsraum.

$$\dim G(2,4) = 2 \cdot (4-2) = 4 \quad \dim \mathbb{P}(\Lambda^2 V) = \binom{4}{2} - 1 = 5.$$

Wir wollen $G(2,4) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ durch eine Gleichung
für die Plückerkoordinaten λ_i beschreiben.

7.9. Satz (Plückerquadratik)

Sei $q = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}$

die Plückerquadratik. Dann gilt

$$G(2,4) = \{(\lambda_{ij}) \in \mathbb{P}^5 \mid q(\lambda_{ij}) = 0\}$$

Beweis

Wir zeigen zunächst die Inklusion

$$G(2,4) \subset \{(\lambda_{ij}) \mid q(\lambda_{ij}) = 0\}$$

Zunächst unter Annahme $2 \neq 0 \in K$.

Sei $U = \langle a_1, a_2 \rangle$ und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\text{Dann gilt: } \det(A|A) = \det \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} \end{array} \right)$$

Entwicklung nach den ersten beiden Spalten liefert:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A|A) &= \lambda_{12}\lambda_{34} - \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{14}\lambda_{23} \\ &\quad + \lambda_{23}\lambda_{14} - \lambda_{24}\lambda_{13} + \lambda_{34}\lambda_{12} \\ &= 2q(\lambda_{ij}) \end{aligned}$$

Wegen $2 \neq 0$ folgt. $q(\lambda_{ij}) = 0$. Für $\lambda_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$

gibt $q(\lambda_{ij}(a)) \equiv 0 \in \mathbb{Z}[a_{i+1}, \dots, a_{i+2}] \Rightarrow \mathbb{E}(Z_4) \subset \text{Plückerquadratik für beliebige Körper.}$

Umgekehrt, sei $q(\lambda_{ij}) = 0$.

Wir müssen zeigen, dass der Vektor (λ_{ij}) die Plückerkoordinaten eines Unterraums sind.

Da $\mathbb{P}(\Lambda^2 V) = U_{12}$ liegt $[(\lambda_{ij})] \in U_{12}$

etwa $(\lambda_{ij}) \in U_{12}$. Dann dürfen wir $\lambda_{12} = 1$ annehmen und die Gleichung sagt:

$$\lambda_{34} = \lambda_{13}\lambda_{24} - \lambda_{14}\lambda_{23}$$

Also der Raum mit Basis:

$$A = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ -\lambda_{23}\lambda_{13} \\ \lambda_{14}\lambda_{24} \end{pmatrix} \text{ hat Koordinaten } (\lambda_1\lambda_{13} + \lambda_{14}\lambda_{23}, \lambda_{24}\lambda_{13}, \lambda_{24}\lambda_{14}, \lambda_{34})$$

woher $\lambda_{34} = -\lambda_{23}\lambda_{14} + \lambda_{24}\lambda_{13}$ das ist erfüllt.