

folgt $q(\lambda_{ij}(a)) \equiv 0 \in \mathbb{Z}[a_{11}, \dots, a_{42}] \Rightarrow G(2,4) \subset \text{Plückerquadratik für beliebige Körper.}$

Umgekehrt, sei $q(\lambda_{ij}) = 0$.

Wir müssen zeigen, dass der Vektor (λ_{ij}) die Plückerkoordinaten eines Unterraums sind.

Da $P(\Lambda^2 V) = U \cup U^\perp$ liegt $[(\lambda_{ij})] \in U^\perp$

etwa $(\lambda_{ij}) \in U^\perp$. Dann dürfen wir $\lambda_{12} = 1$ annehmen und die Gleichung sagt:

$$\lambda_{34} = \lambda_{13}\lambda_{24} - \lambda_{14}\lambda_{23}$$

Also der Raum mit Basis:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\lambda_{13} & \lambda_{14} \\ -\lambda_{23} & \lambda_{24} \end{pmatrix} \text{ hat Koordinaten } (\lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{34})$$

wobei $\lambda_{34} = -\lambda_{23}\lambda_{14} + \lambda_{24}\lambda_{13}$ das ist erfüllt.

24.06.08

$G(2,4)$ enthält 2-dim Unterräume z.B.

$$\{x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0\} \cong \mathbb{P}_{A_0}^2 \subset G(2,4)$$

besteht aus der 2-UVR die in $\langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ enthalten sind. $A_0 = P(\langle e_2, e_3, e_4 \rangle) = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^5$ ist die unendlich ferne Hyperebene des $\mathbb{P}^3$.

Also $K = \mathbb{R}$ gilt:

$$G_{\mathbb{R}}(2,4) \cap \mathbb{P}_{A_0}^2 = \{L \subset \mathbb{R}^4\} \subset \{L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3\}$$

Für

$$\{x_{34} = x_{24} = x_{23} = 0\} = \mathbb{P}_{B_0}^2 \subset G(2,4)$$

besteht aus den Geraden $L \in \mathbb{P}^5$ die den Punkt $B = [e_1]$ enthalten.

Allgemein $A \subset \mathbb{P}^3$ Hyperebene, $B \in \mathbb{P}^3$ Punkt.

$$\mathbb{P}_A^2 = \{L \in G(2,4) \mid L \subset A\}$$

$$\mathbb{P}_B^2 = \{L \in G(2,4) \mid B \in L\}$$



Schnittverhalten.

$A, A' \subset \mathbb{P}^3$ zwei verschiedene Hyperebenen, dann gilt:

$$\mathbb{P}_A^2 \cap \mathbb{P}_{A'}^2 = \{A \cap A'\} \\ = \text{Punkt}$$

$B, B' \in \mathbb{P}^3$ verschiedene Punkte

$$\mathbb{P}_B^2 \cap \mathbb{P}_{B'}^2 = \{ \overline{BB'} \}$$

$$\mathbb{P}_A^2 \cap \mathbb{P}_B^2 = \begin{cases} \emptyset, & B \notin A \\ \{L \in G(2,4) \mid B \in L \cap A\} \cong \mathbb{P}^1, & B \in A \end{cases}$$

$$\{L \in G(2,4) \mid B \in L \cap A\} \cong \mathbb{P}^1, B \in A \quad \boxed{X}$$

Für $L \subset \mathbb{P}^3$ eine feste Gerade mit Plückerkoordinaten

$$(\lambda_{ij}) \text{ ist } H_L = \{ (x_{ij}) \in \mathbb{P}^5 \mid \lambda_{12}x_{34} - \lambda_{13}x_{24} + \lambda_{14}x_{23} + \lambda_{23}x_{14} - \lambda_{24}x_{13} + \lambda_{34}x_{12} = 0 \}$$

$\cong \mathbb{P}^4$ eine Hyperebene

Satz

$$H_L \cap G(2,4) = \{ L' \in G(2,4) \mid L' \cap L \neq \emptyset \}$$

Beweis:

Sei $L = \mathbb{P} \langle a_1, a_2 \rangle$, $L' = \mathbb{P} \langle b_1, b_2 \rangle$

Die Gleichung von H_L eingeschränkt auf die Grassmannsche bekommen wir indem wir die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ nach den ersten beiden Zeilen entwickeln,}$$

$$0 = \det(a_1, a_2, b_1, b_2) \Leftrightarrow \langle a_1, a_2 \rangle \cap \langle b_1, b_2 \rangle \neq \emptyset \Leftrightarrow L \cap L' \neq \emptyset.$$

Da $G(2,4)$ 4-dimensional ist, erwarten wir, dass für allgemeine Geraden $L_1, \dots, L_4$ die Menge

$$G(2,4) \cap H_{L_1} \cap \dots \cap H_{L_4}$$

endlich ist. Aus wieviele Punkten besteht diese?

Mit anderen Worten wieviele Geraden L schneiden 4 vorgegebene Geraden im Raum?

Schubert:

Betrachte L_1, L_2 die sich schneiden

$$L_1 \cap L_2 = \{B\}$$

$$\overline{L_1 L_2} = A$$



$$G(2,4) \cap H_{L_1} \cap H_{L_2} = \mathbb{P}_A^2 \cup \mathbb{P}_B^2$$

Analog: $L_3 \cap L_4 = \{B'\}$, $\overline{L_3 L_4} = A'$

$$\begin{aligned} G(2,4) \cap H_{L_4} \cap \dots \cap H_{L_4} &= (P_A^2 \cup P_B^2) \cap (P_{A'}^2 \cup P_{B'}^2) \\ &= \{A \cap A'\} \cup \{B \cap B'\} \text{ zwei Punkte} \\ &\quad \text{in } G(2,4) \end{aligned}$$

also gibt es in diesem Falle 2 Geraden.

Man kann zeigen für $K = \mathbb{C}$ gilt der Schnitt von $G_{\mathbb{C}}(2,4)$ mit 4 Hyperebenen $H_{L_1}, \dots, H_{L_4}$ besteht entweder aus 2 Punkten (mit Vielfachheit gezählt) oder unendlich.

Für $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen, halten wir die Frage, wieviele 2-dim Unterräume $U \subset \mathbb{F}_q^4$ existieren in den Übungen in Lin Alg I beantwortet.

$$|\{\text{Basen von 2-dim UVR}\}| = (q^4 - 1)(q^4 - q)$$

$$|G(\mathbb{F}_q)(2,4)| = (q^2 - 1)(q^2 - q)$$

$$\Rightarrow |G_{\mathbb{F}_q}(2,4) = \frac{(q^4 - 1)(q^4 - q)}{(q^2 - 1)(q^2 - q)} = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1) = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1$$

Wir zählen ein 2-tes Mal Punkte in $G_{\mathbb{F}_q}(2,4)$ indem wir das Ergebnis des Gaußalgorithmus auf ${}^t(a_1, a_2)$ betrachten.

Zunächst K beliebig: ${}^t(a_1, a_2)$ ist Rang 2, 2×4 Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{array} \right) \quad K^4$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right) \quad K^3$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad K^2 \cup K^2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad K^1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad K^0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |G_{\mathbb{F}_q}(2,4)| \\ = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1 \end{aligned}$$

§8 Segreprodukte und Rang von Tensoren

Sei V, W endl. Vektorräume der Dimensionen n und m .

8.1. Definition

Ein Tensor $t \in V \otimes W$ heißt zerlegbar, wenn t im Bild von $V \times W \rightarrow V \otimes W$ liegt.

Da $\lambda V \otimes W = V \otimes \lambda W$, $\lambda \in K$ ist es besser die Abbildung

$$P(V) \times P(W) \hookrightarrow P(V \otimes W)$$

zu betrachten. Die Abbildung heißt Segreeinbettung des Produkts.

Da $\dim V \otimes W = n \cdot m$ hat

$$P(V) \times P(W) \subset P(V \otimes W)$$

Kodimension

$$(n \cdot m - 1) - (n - 1) - (m - 1) = (n - 1)(m - 1)$$

Bzgl. Basen $e_1, \dots, e_n$ von V und $f_1, \dots, f_m$ von W hat jeder Tensor die eindeutige Darstellung

$$t = \sum_{ij} z_{ij} e_i \otimes f_j \quad \text{mit } z_{ij} \in K$$

Wann ist so ein Tensor zerlegbar?

Dazu fassen wir die Koeffizienten z_{ij} als eine Matrix auf $(z_{ij}) \in K^{n \times m}$.

8.2. Satz

Ein Tensor $t = \sum z_{ij} e_i \otimes f_j \in V \otimes W$

ist zerlegbar, genau dann, wenn $\text{Rang}(z_{ij}) \leq 1$.

Beweis:

Sei t zerlegbar, etwa

$$\sum z_{ij} e_i \otimes f_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m y_j f_j \right)$$

Dann gilt: $z_{ij} = x_i y_j$

$$\text{bzw. } (z_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1, \dots, y_m)$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K^m & \xrightarrow{(z_{ij})} & K^n \\ (y_1, \dots, y_m) \mapsto & & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \text{Rang}(z_{ij}) = \dim \text{Bild}(z_{ij}) \leq 1$$

Umgekehrt sei $\text{Rang}(z_{ij}) = 1$.

Dann $K^m \rightarrow K^n$ faktoriert die Abb. und eine Basiswahl $\text{Bild}(z_{ij}) \cong K$ liefert eine Zerlegung.

8.3. Definition

Sei $t \in V \otimes W$ ein Tensor. t hat Tensorrang r , wenn t die Summe von r zerlegbaren Vektoren ist und r minimal mit dieser Eigenschaft ist.

8.4. Satz

$t = \sum z_{ij} e_i \otimes f_j$ hat Tensorrang r genau dann, wenn die Matrix (z_{ij}) Rang r hat.

Beweis:

(z_{ij}) hat Rang $\leq r$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} K^m & \xrightarrow{\quad} & K^n \\ (y_1, \dots, y_m) \mapsto & & \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nr} \end{pmatrix} \end{array} \text{ faktoriert.}$$

$$\Leftrightarrow (z_{ij}) = \sum_{k=1}^r \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} (y_{1k} \dots y_{mk}) \text{ liefert die Zerlegung in } r \text{ zerlegbare.}$$

$$\Leftrightarrow t \text{ hat Tensorrang } \leq r.$$

Bemerkung:

Implizit im Beweis haben wir

$$V \otimes W \cong \text{Hom}(W^*, V) \text{ verwendet.}$$

Analog definiert man Zerlegbarkeit und Tensorprodukt in $U \otimes V \otimes W$ in mehr Faktoren.

Die Frage welchen Rang ein Tensor hat, hat Anwendung in der Informatik

Beispiel:

Die Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

braucht bei der Standardmethode $2^3 = 8$

Multiplikationen.

Es geht auch weniger:

$$U = \text{Hom}(K^2, K^2), V = \text{Hom}(K^2, K^2) = W$$
$$U \times V \rightarrow W \Leftrightarrow U \otimes V \rightarrow W \Leftrightarrow U \otimes V \xrightarrow{\beta} W$$
$$\Leftrightarrow \beta \in (U^* \otimes V^*) \otimes W$$

8.5. Satz (Strassen)

Das Matrizenprodukt zweier 2×2 Matrizen

lässt sich mit 7 Multiplikationen und 18 Additionen durchführen.

Genauer:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) \\ \mu_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} \\ \mu_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) \\ \mu_4 &= a_{22}(b_{21} - b_{11}) \\ \mu_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\ \mu_6 &= (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12}) \\ \mu_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \mu_1 + \mu_4 - \mu_5 + \mu_7 \\ c_{12} &= \mu_3 + \mu_5 \\ c_{21} &= \mu_2 + \mu_4 \\ c_{22} &= \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 + \mu_6 \end{aligned}$$

Korollar:

Zwei $n \times n$ Matrizen lassen sich mit

$$n^{\log_2 7} \approx n^{2,807} < n^3$$

Multiplikatoren multiplizieren.

Beweis:

Sei $n = 2^k$ andernfalls addieren wir 0-Zeilen und Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$2^{k-1} \times 2^{k-1}$ Blöcke, wende die Formel an, wobei die

Multiplikation der kleineren Matrizen rekursiv
behandelt wird. ■