

Multiplikation der kleineren Matrizen rekursiv behandelt wird. $\Rightarrow$

26.06.08

§ 9 Das Zornsche Lemma und Anwendungen

Das Auswahlaxiom der Mengenlehre besagt folgendes:

9.1. Auswahllemma:

Sei $(M_i)_{i \in I}$ $| I \neq \emptyset$, eine Familie von nicht leeren Mengen und $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. Dann existiert eine Auswahlfunktion $f: I \rightarrow M$ mit $f(i) \in M_i \quad \forall i \in I$.

So ein f nennt man Auswahlfunktion, die Menge der Auswahlfunktionen wird mit $\prod_{i \in I} M_i$ bezeichnet.

Mit anderen Worten:

(Unendliche) Kartesische Produkte von nicht leeren Mengen sind nicht leer.

Das Auswahlaxiom erlaubt Existenzaussagen zu beweisen, für die konstruktive Beweise nicht bekannt sind.

Am häufigsten wird das Auswahlpostulat in seiner Folgerung dem Zornschen Lemma angewendet.

Wir formulieren zunächst das Zornsche Lemma.

9.2 Definition

Sei M eine Menge. Eine Ordnungsrelation $\leq$ auf M ist eine Relation auf M , $\leq \subseteq M \times M$ die

- 1) $x \leq x \quad \forall x \in M$

- 2) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$

- 3) (Transitivität) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Man nennt $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

Wir verlangen nicht, dass

$$x \leq y \text{ oder } y \leq x \quad \forall x, y \in M$$

gilt. Daher "partiell".

Beispiele:

1) $M =$ Bewohner eines Hochhauses

$x \leq y$, falls Stockwerk $(x) \leq$ Stockwerk (y)
ist keine Ordnungsrelation, da 2) nicht
erfüllt ist.

2) $(\mathbb{R}, \leq)$ ist eine vollständig geordnete Menge

3) $(\mathbb{Z}^n, \leq)$ definiert durch $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$, falls
 $a_i \leq b_i$ eine partiell geordnete Menge.

4) N beliebige Menge, $M = 2^N$

$(M, \subset)$ ist partiell geordnet.

$(A \leq B \text{ falls } A \subset B)$.

9.3. Definition:

1) Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Eine
Teilmenge $K \subset M$ heißt Kette, wenn

$x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in K$ gilt.

$(K, \leq)$ ist also vollständig geordnet.

2) Eine obere Schranke einer Kette $K \subset M$ ist ein Element
 $y \in M$, für das $x \leq y \quad \forall x \in K$ gilt.

Eine obere Grenze von K ist eine kleinste obere
Schranke, also ein Element $y \in M$ für das

$x \leq y \quad \forall x \in K$ gilt,

und außerdem $y \leq z$ für alle oberen Schranken
von K erfüllt ist.

Im Allgemeinen haben Ketten weder obere Schranken
noch obere Grenzen.

Beispiel:

1) $(\mathbb{R}, \leq)$. $K \subset \mathbb{R}$ hat eine obere Schranke genau dann, wenn
 K nach oben beschränkt ist. In diesem Fall ist

$y = \sup_{x \in K} x$ eine obere Grenze

2) In $(\mathbb{Q}, \leq)$ hat nicht jede nach oben beschränkte Teilmenge
eine obere Grenze. Zum Beispiel:

$K = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq \sqrt{2}\}$ hat keine obere Grenze in $\mathbb{Q}$.

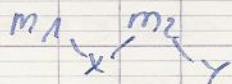
9.4. Definition

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge.

Ein maximales Element von M ist ein Element $m \in M$, dass " $m \leq x \Rightarrow m = x \quad \forall x \in M$ " erfüllt.

Analog definiert man minimale Elemente.

Maximale Elemente müssen nicht eindeutig bestimmt sein.



9.5. Satz (Zornsche Lemma)

Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete nicht leere Menge. Hat jede Kette $K \subset M$ eine obere Schranke, dann existiert ein maximales Element in M .

Vor dem Beweis eine Anwendung in der linearen Algebra.

9.6. Satz

Sei V ein beliebiger K -VR. Dann hat V eine Basis

9.7. Definition

Sei $\{v_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V .

$\{v_i\}_{i \in I}$ heißt linear unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ die Vektoren $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ linear unabhängig sind.

$\{v_i\}_{i \in I}$ heißt Erzeugendensystem von V , wenn es zu jedem Vektor $w \in V$ eine endliche Teilmenge

$\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ gibt, so dass $w \in \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_n} \rangle$

Eine Basis $\{v_i\}_{i \in I}$ von V ist ein Erzeugendensystem aus linear unabhängigen Vektoren.

Beweis von Satz 9.6:

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U} = \{A \mid A \subset V \text{ ist eine Familie von linear unabhängigen Vektoren}\}$$

$\mathcal{U} \neq \emptyset$, da $\emptyset \in \mathcal{U} (\subset Z^V)$.

und die Ordnungsrelation

$$A \leq B \text{ falls } A \subset B$$

Die leere Kette hat eine obere Schranke, da $\mathcal{U} \neq \emptyset$.

Sei $K \in \mathcal{U}$ eine nicht leere Kette.

$$B = \bigcup_{A \in K} A$$

z.z. ist $B \in \mathcal{U}$. Zu $v_1, \dots, v_n \in B$ gibt $A_1, \dots, A_n \in K$,
so dass $v_i \in A_i$. Nach Umm Nummerieren dürfen wir
 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$ annehmen, da K eine Kette ist.

Dann sind $v_1, \dots, v_n \in A_n$ und daher linear unabhängig.

Nach dem Zornschen Lemma existieren ein
maximales Element $B \in \mathcal{U}$. Wir zeigen B ist eine
Basis.

Sei $w \in V$ beliebig. Ist $w \in B$, dann ist w Linear-
kombination eines einzelnen Elementes $v_i \in B$. Sei
 $w \notin B$. Dann kann $B \cup \{w\}$ kein Element von $\mathcal{U}$
sein. D.h. existieren Vektoren $v_1, \dots, v_n \in B$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$
nicht alle Null, so dass

$$\lambda w + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0.$$

Da B eine Familie von linear unabhängigen
Vektoren ist, gilt $\lambda \neq 0$.

$$\text{Also } w = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Also B ist ein Erzeugendensystem und damit
eine Basis.

9.8. Satz (Basisergänzungssatz)

Sei V ein K -VR und A eine Familie von linearunabh. Vektoren. Dann lässt sich A zu einer Basis $B \supset A$ erweitern.

Beweis:

Wir betrachten:

$$M' = \{A' \mid A \subset A' \subset V \text{ von linearunabh. Vektoren}\}$$

und argumentieren wie gehabt.

Den Beweis des Kroneischen Lemmas zerlegen wir in Etappen.

9.9. Fundamentallemma

Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge in der jede Kette eine obere Grenze hat, und

$$f: M \rightarrow M \text{ eine Abbildung mit } x \leq f(x) \quad \forall x \in M.$$

Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. $\exists x \in M$ mit $f(x) = x$.

Wir zeigen zunächst, dass das Fundamentallemma zusammen mit dem Auswahlaxiom, das Kroneische Lemma impliziert.

zunächst:

9.10. Folgerung:

Sei M eine geordnete Menge, in der jede Kette eine obere Grenze hat. Dann gibt es ein maximales Element in M .

Beweis:

Mit dem Auswahlpostulat: M ist nicht leer, da die leere Kette eine obere Grenze hat, welches dann das eindeutig bestimmte minimale Element von M ist.

Angenommen es existiert kein maximales Element.

Zu jedem $x \in M$ ist dann $M_x = \{y \in M \mid x < y\}$ nicht leer.

Sei $f: M \rightarrow M$ eine Auswahlfunktion für diese Familie.

Also $f(x) \in M_x \Leftrightarrow x < f(x) \quad \forall x \in M$.

Nach dem Fundamentallemma hat f einen Fixpunkt x , ein Widerspruch zu $x \in f(x)$.

Die Voraussetzung von 9.10 sind stärker als die im Zornschen Lemma.

9.11. Satz (Hausdorff)

Sei M eine geordnete Menge. Dann gibt es eine maximale Kette in M .

Beweis:

Die Menge der Ketten ist bzgl. Inklusion partiell geordnet. Für jede Kette $\mathcal{K}$ von Ketten ist

$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ eine Kette und obere Grenze von $\mathcal{K}$.

Wir können also Folgerung 9.10. anwenden.

Beweis des Zornschen Lemmas:

Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge in der jede Kette eine obere Schranke hat.

Sei $K \subset M$ eine maximale Kette und $z \in M$ eine obere Schranke von K . Für jedes $y \in M$ mit $z \leq y$ ist $K \cup \{y\}$ ebenfalls eine Kette, $x \in K$ $x \leq z \leq y \Rightarrow x \leq y$, also ist mit jedem $x \in K$ vergleichbar. Da K maximal ist, gilt $K \cup \{y\} = K$, also $y \leq z \leq y \Rightarrow y = z$, d.h. z ist ein maximales Element.