Lineare Algebra II
Übungsblatt 10

Abgabetermin Donnerstag, den 26.06.2008 vor der Vorlesung.

1. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = (a_1, ..., a_4) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a_i = \sum_{i=1}^4 a_{ij} e_i \in V = \mathbb{Q}^4$, indem Sie

$$a_1 \wedge ... \wedge a_4 = \det(A) \cdot e_1 \wedge ... \wedge e_4 \in \bigwedge^4 V$$

berechnen.

2. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums V mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\bigwedge^k \varphi$.

3. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und V^* der Dualraum. Zeigen Sie:

   (a) Für alle $\alpha \in V^*$ und alle k erhalten wir einen Homomorphismus (genannt Kontraktion)

   $$\begin{array}{cccc} i_\alpha : & \bigwedge^k V & \longrightarrow & \bigwedge^{k-1} V \\ & w & \mapsto & i_\alpha(w) \end{array}$$

   indem wir i_α vermöge der universellen Eigenschaft von $\bigwedge^k V$ durch die multilineare Abbildung

   $$\begin{array}{ccl} V \times ... \times V & \longrightarrow & \bigwedge^{k-1} V \\ (v_1, ..., v_k) & \mapsto & \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha(v_j) \cdot v_1 \wedge ... \wedge v_{j-1} \wedge v_{j+1} \wedge ... \wedge v_k \end{array}$$

   definieren. Für $k = 0$ setzen wir $i_\alpha(w) = 0$ und $\bigwedge^{-1} V = 0$.

   (b) Ist $v \in V$, dann ist

   $$i_\alpha(v) = \alpha(v)$$

   die duale Paarung von Elementen von V und V^*.

   (c) Für alle $\alpha \in V^*$, $a \in \bigwedge^{k_1} V$ und $b \in \bigwedge^{k_2} V$ gilt

   $$i_\alpha(a \wedge b) = (i_\alpha a) \wedge b + (-1)^{k_1} a \wedge (i_\alpha b)$$

   (d) $i_\alpha \circ i_\alpha = 0$ und $i_\alpha \circ i_\beta = -i_\beta \circ i_\alpha$ für $\alpha, \beta \in V^*$.

4. (a) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $e_1, ..., e_n$ und $0 < k < n$. Das $\wedge$-Produkt induziert eine Abbildung

   $$\bigwedge^k V \times \bigwedge^{n-k} V \to \bigwedge^n V = K \cdot e_1 \wedge ... \wedge e_n \cong K$$

   Zeigen Sie, daß dies einen Isomorphismus von

   $$\bigwedge^k V \to \left(\bigwedge^{n-k} V\right)^*$$

   induziert.

   (b) Im Fall $V = \mathbb{R}^3$ und e_1, e_2, e_3 eine orthonormale Basis bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts geben die Isomorphismen

   $$\bigwedge^2 V \to \left(\bigwedge^{3-2} V\right)^* = V^* \text{ und } V^* \cong V$$

   eine bilineare Abbildung $V \times V \to \bigwedge^2 V \cong V$. Zeigen Sie: Diese Abbildung stimmt mit dem Kreuzprodukt überein.

Ordnen Sie jeder Aufgabe vor und nach Bearbeitung das Prädikat zu leicht, leicht, mittel, schwer oder zu schwer zu.