Lineare Algebra II
Präsenzübung

Dienstag 01.07.08 und Donnerstag 03.07.08, jeweils 12:30-14:00 in HS IV, Geb. E2 4.

Abgabetermin Dienstag, den 08.07.2008 vor der Vorlesung. Von den 8 Aufgaben gehen die 4 mit den höchsten Punktzahlen in die Wertung ein.

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^5\right)$$
Bestimmen Sie die Jordansche Normalform J von A und eine Basiswechselmatrix $S \in \operatorname{Gl}(5, \mathbb{C})$ mit
$$S \cdot A \cdot S^{-1} = J$$

2. Bestimmen Sie für
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
den Limes
$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} A^k$$

3. Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Sei n_1 die Anzahl der 2-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}^4$, n_2 die Anzahl der Geraden in $\mathbb{F}^3$ (nicht notwendigerweise durch 0) und n_3 die Anzahl der Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$.

   Bestimmen Sie n_1, n_2 und n_3. Warum gilt $n_1 = n_2 + n_3$?

4. Seien $(x_1, y_1), ..., (x_4, y_4) \in \mathbb{R}^2$ Punkte von denen keine 3 kollinear sind. Zeigen Sie, daß $(x_1, y_1), ..., (x_4, y_4)$ genau dann auf einem Kreis liegen, wenn
$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

5. Sei
$$A = J(0,3) \qquad B = J(0,2)$$
Bestimmen Sie die Jordansche Normalform J des Kroneckerprodukts $A \otimes B$ und ein $S \in \operatorname{Gl}(6, \mathbb{Q})$ mit
$$S \cdot (A \otimes B) \cdot S^{-1} = J$$

6. Bestimmen Sie $\bigwedge^2 V$ für den $\mathbb{Z}$-Modul
$$V = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$$

7. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und

$$a_1 = e_1 + e_2 - e_3 \qquad a_2 = e_1 - e_3$$

Welche Dimension hat der von

$$a_1 \wedge a_1 \quad a_1 \wedge a_2 \quad a_2 \wedge a_1 \quad a_2 \wedge a_2$$

aufgespannte Untervektorraum von $\bigwedge^2 V$.

8. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\varphi \in \operatorname{End} V$ ein Endomorphismus mit darstellender Matrix

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\wedge^2\varphi)$ von $\wedge^2\varphi$ bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ und $\wedge^2\varphi$.