Lineare Algebra II
Übungsblatt 2

Abgabe bis Freitag, den 02.05.2008 im Postfach AG Schreyer im Erdgeschoss E2 4.

1. Betrachten Sie den Endormorphismus
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$
der genau die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ hat.
   (a) Bestimmen Sie die Zerlegung von $\mathbb{Q}^5$ in die Haupträume von A.
   (b) Welche Jordansche Normalform hat A?

2. Sei
$$A = J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie die invertierbaren Matrizen $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, die mit A kommutieren, d.h. für die gilt $SA = AS$.

3. Sei $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: $A^2 = A$ genau dann, wenn A diagonalisierbar ist und die Eigenwerte in $\{0, 1\}$ sind.

   Hinweis: Fassen Sie zunächst $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ auf, und verwenden Sie den Satz über die Jordansche Normalform.

4. Die Matrizen
$$N_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$
sind nilpotent. Bestimmen Sie für $i = 1, 2$
   (a) die Jordansche Normalform J_i von N_i,
   (b) die Basiswechselmatrix $S_i \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$, die N_i in die Jordansche Normalform J_i bringt, d.h. mit $S_i N_i S_i^{-1} = J_i$.

Ordnen Sie jeder Aufgabe vor und nach Bearbeitung das Prädikat zu leicht, leicht, mittel, schwer oder zu schwer zu.