

Lineare Algebra II  
Übungsblatt 3

Abgabetermin **Donnerstag, den 08.05.2008 vor der Vorlesung.**

1. (a) Sei  $D \in K^{n \times n}$  eine Diagonalmatrix mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie:

$$\{S \in \text{GL}(n, K) \mid SD = DS\}$$

ist die Menge der invertierbaren Diagonalmatrizen.

- (b) Sei  $N \in K^{n \times n}$  eine nilpotente Matrix. Zeigen Sie: Die Menge der Matrizen

$$\{S \in \text{GL}(n, K) \mid SN = NS\}$$

hängt von  $n$  Parametern ab genau dann, wenn  $N$  nur einen Jordanblock hat.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie  $E_3 + 4A + A^2 - A^3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und  $\chi_A(t)$ .

3. Sei  $p \in K[t]$  ein Polynom,  $A \in K^{n \times n}$  eine quadratische Matrix und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ . Zeigen Sie:  $p(\lambda)$  ist ein Eigenwert der Matrix  $p(A) \in K^{n \times n}$ .
4. (a) Sei  $A \in \text{GL}(n, K)$ . Zeigen Sie, daß es ein Polynom  $p \in K[t]_{\leq n-1}$  gibt mit  $p(A) = A^{-1}$ .
- (b) Bestimmen Sie dieses Polynom für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie damit die Inverse von  $A$ .

Ordnen Sie jeder Aufgabe vor und nach Bearbeitung das Prädikat zu leicht, leicht, mittel, schwer oder zu schwer zu.