Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Janko Boehm

Lineare Algebra II
Übungsblatt 3

Abgabetermin Donnerstag, den 08.05.2008 vor der Vorlesung.

1. (a) Sei $D \in K^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix mit n verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie:

$$\{S \in \mathrm{GL}(n, K) \mid SD = DS\}$$

ist die Menge der invertierbaren Diagonalmatrizen.

   (b) Sei $N \in K^{n \times n}$ eine nilpotente Matrix. Zeigen Sie: Die Menge der Matrizen

$$\{S \in \mathrm{GL}(n, K) \mid SN = NS\}$$

hängt von n Parametern ab genau dann, wenn N nur einen Jordanblock hat.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $E_3 + 4A + A^2 - A^3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\chi_A(t)$.

3. Sei $p \in K[t]$ ein Polynom, $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie: $p(\lambda)$ ist ein Eigenwert der Matrix $p(A) \in K^{n \times n}$.

4. (a) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zeigen Sie, daß es ein Polynom $p \in K[t]_{\leq n-1}$ gibt mit $p(A) = A^{-1}$.

   (b) Bestimmen Sie dieses Polynom für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie damit die Inverse von A.

Ordnen Sie jeder Aufgabe vor und nach Bearbeitung das Prädikat zu leicht, leicht, mittel, schwer oder zu schwer zu.