

Lineare Algebra II
Übungsblatt 4**Abgabetermin Donnerstag, den 15.05.2008 vor der Vorlesung.**

1. Sei
- $p \in K[t]$
- ein normiertes Polynom. Zeigen Sie:

Für $f \in K[t]$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$ mit

- (a) $f = q \cdot p + r$
 (b) $\deg(r) < \deg(p)$.

Dabei habe das 0-Polynom den Grad $-\infty$.

2. Sei
- $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$
- . Zeigen Sie, daß die Jordansche Normalform von
- A
- durch das charakteristische Polynom
- χ_A
- und das Minimalpolynom
- p_A
- von
- A
- eindeutig bestimmt ist. Gilt diese Aussage auch für
- $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$
- ?

3. Sei

$$A_t = \begin{pmatrix} J(0, r) & t \cdot B \\ 0 & J(0, n-r) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

 $r \geq n-r$ und $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{C}^{r \times n-r}$ mit $b_{r, n-r} = 1$ und $b_{i,j} = 0$ sonst. Zeigen Sie, daß alle Matrizen A_t für $t \neq 0$ die Jordansche Normalform

$$J = \begin{pmatrix} J(0, r+1) & 0 \\ 0 & J(0, n-r-1) \end{pmatrix}$$

haben.

4. Seien
- $P = (n_1, \dots, n_k)$
- und
- $Q = (m_1, \dots, m_l)$
- Partitionen von
- n
- . Wir definieren
- $P \geq Q$
- , wenn es eine von einem Parameter
- $t \in \mathbb{R}$
- stetig abhängende Familie von nilpotenten Matrizen
- $A_t \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- gibt, sodaß die Jordansche Normalform von
- A_0
- die nilpotente Jordanmatrix

$$\begin{pmatrix} J(0, m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(0, m_k) \end{pmatrix}$$

zur Partition Q ist, während alle Matrizen A_t mit $t \neq 0$ Jordansche Normalform zur Partition P haben. Durch $P \geq Q$ ist eine partielle Ordnung auf der Menge der Partitionen gegeben.

- (a) Zeigen Sie: Im Fall
- $n = 4$
- ist diese Ordnung gegeben durch

$$(4) > (3, 1) > (2, 2) > (2, 1, 1) > (1, 1, 1, 1)$$

- (b) Beschreiben Sie
- $\geq$
- für die Fälle
- $n = 5, 6$
- .

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 und (ohne Beweis) die Tatsache, daß $\geq$ eine partielle Ordnung ist, d.h. insbesondere $P \geq Q$ und $Q \geq R$ impliziert $P \geq R$.

Ordnen Sie jeder Aufgabe vor und nach Bearbeitung das Prädikat zu leicht, leicht, mittel, schwer oder zu schwer zu.