PROF. DR. FRANK-OLAF SCHREYER
DR. JANKO BOEHM

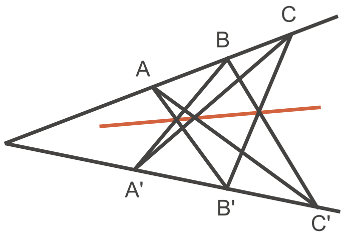
Lineare Algebra II
Übungsblatt 7

Abgabetermin Donnerstag, den 05.06.2008 vor der Vorlesung.

1. Zeigen Sie den Satz von Pappus: Seien A, B, C, A', B', C' paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^2$, so daß $\{A, B, C\}$ und $\{A', B', C'\}$ jeweils kollinear sind und die beiden Kollineariätsgeraden verschieden sind. Dann sind die Punkte

$$AB' \cap A'B \qquad AC' \cap A'C \qquad BC' \cap B'C$$

kollinear.



2. (a) Projektive Automorphsmen von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ lassen sich auch als lineare rationale Funktionen darstellen: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

Zeigen Sie: Der zugehörige Automorphismus von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dargestellt auf der Karte $U_1 = \mathbb{C}$ mit der Koordinate $z = \frac{x_0}{x_1}$ ist durch die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

gegeben.

(b) Zeigen Sie: Die Komposition zweier solcher Abbildungen entspricht dem Matrizenprodukt.

(c) Für $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, ist das Doppelverhältnis durch

$$\lambda(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_3} \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_4}$$

definiert. Zeigen Sie, daß das Doppelverhältnis unter projektiven Automorphismen invariant ist: Für f wie in (a) gilt:

$$\lambda(t_1, t_2, t_3, t_4) = \lambda(f(t_1), f(t_2), f(t_3), f(t_4))$$

3. Sei $Q = V(q) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eine ebene Quadrik von vollem Rang, d.h. gegeben durch ein homogenes quadratisches Polyom

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mit einer symmetrischen Matrix A von vollem Rang. Zeigen Sie:

(a) Ist $p_0 \in Q$ ein Punkt und $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eine Gerade, die p_0 nicht enthält, dann ist die Projektion von p auf L

$$\begin{array}{rccc} \pi: & Q & \to & L \\ & p & \mapsto & L \cap \overline{p\, p_0} \end{array}$$

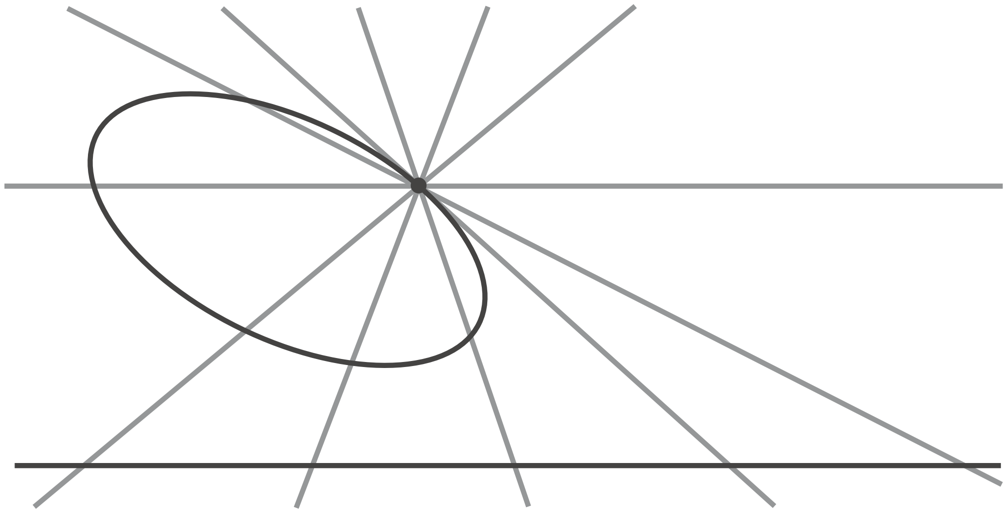
(Durch welche Gerade muß man $\overline{p\, p_0}$ ersetzen für $p = p_0$?). Parametrisiert man L mit Hilfe von zwei verschiedenen Punkten $a = (a_0 : a_1 : a_2)$, $b = (b_0 : b_1 : b_2) \in L$

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to & L \\ & (s:t) & \mapsto & (sa_0 + tb_0 : sa_1 + tb_1 : sa_2 + tb_2) \end{array}$$

dann liefert die Komposition eine Parametrisierung

$$\begin{array}{rccc} \psi = \pi^{-1} \circ \varphi: & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to & Q \\ & (s:t) & \mapsto & (f_0(s,t) : f_1(s,t) : f_2(s,t)) \end{array}$$

durch quadratische Polynome f_i.



(b) Welche Parametrisierung erhält man wenn man

$$Q_0 = V\left(x_1^2 - x_0 x_2\right)$$

von dem Punkt $p_0 = (1:0:0)$ auf die Gerade

$$L = \{x_0 = 0\} = \left\{(0:s:t) \mid (s:t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right\}$$

projiziert.

4. Der Satz von Bezout besagt:

   Mit Vielfachheit gezählt schneiden sich ebene projektive Kurven $C = V(f)$, $D = V(g) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, wobei $f, g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogene Polynome vom Grad c und d ohne gemeinsamen Faktor sind, in genau $c \cdot d$ vielen Punkten.

   Zeigen Sie diesen Satz in den Spezialfällen, daß D eine Gerade oder eine Quadrik von vollem Rang ist (d.h. $d = 1, 2$).

   Hinweis: Verwenden Sie für $d = 2$ Aufgabe 3.

   Ordnen Sie jeder Aufgabe vor und nach Bearbeitung das Prädikat zu leicht, leicht, mittel, schwer oder zu schwer zu.