Lineare Algebra II
Tutorium 2

Bearbeitung und Besprechung im CIP-Pool der Mathematik,
Montag 26.05.2008, 12:30-14:00 und 14:00-15:30.

Das Maple-Worksheet mit den Inputdaten $v_1, ..., v_5$, $u_1, ..., u_3$, a_1, a_2, a_3 und $f_1^0, f_1^1, f_2^0, f_2^1, f_3^0, f_3^1, f_3^2$ finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

1. Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^n$. Schreiben Sie eine Maple-Routine, die die zu $(v_1, ..., v_n)$ duale Basis von $V^* = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right) = \mathbb{R}^{1\times n}$ berechnet.

   Testen Sie Ihr Programm an dem Beispiel $v_1, ..., v_5 \in \mathbb{R}^5$.

2. Sei $U = \langle u_1, ..., u_n\rangle \subset V = \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Schreiben Sie eine Maple-Routine, die eine Basis von

   $$U^\perp = \left\{\varphi \in V^* = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right) = \mathbb{R}^{1\times n} \mid \varphi\left(u\right) = 0 \text{ für alle } u \in U\right\}$$

   Testen Sie Ihr Programm an dem Beispiel $\langle u_1, ..., u_4\rangle \subset \mathbb{R}^5$.

3. Seien $a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $m_1, ..., m_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^r m_j = d + 1$ und $V = \mathbb{R}\left[x\right]_{\leq d}$. Wir fassen im Folgenden $\frac{\partial}{\partial x}$ als Endomorphismus von V auf:

   $$\frac{\partial}{\partial x} : V \to V,\ f \mapsto f' = \frac{\partial f}{\partial x}$$

   Schreiben Sie Maple-Routinen, die die darstellende Matrix von

   $$\Phi : V \to \mathbb{R}^{d+1},\ p \mapsto \left(\Phi_i\left(p\right)\right)$$
   $$\left(\Phi_i\right) = \left(ev_{a_1}, ev_{a_1} \circ \frac{\partial}{\partial x}, ..., ev_{a_1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m_1-1}, ..., ev_{a_r}, ev_{a_r} \circ \frac{\partial}{\partial x}, ..., ev_{a_r} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m_r-1}\right)$$

   bezüglich der Basen $\left(1, x, ..., x^d\right)$ von V und der Einheitsbasis von $\mathbb{R}^{d+1}$ und die zu $\left(\Phi_i\right)$ duale Basis von V berechnen.

4. Seien $a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $m_1, ..., m_r \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie eine Prozedur, die zu $f_1^0, ..., f_1^{m_j-1}, ..., f_r^0, ..., f_r^{m_j-1} \in \mathbb{R}$ das eindeutige Polynom $p \in \mathbb{R}\left[x\right]_{\leq d}$, $d = \sum_{j=1}^r m_j - 1$ bestimmt mit

   $$\begin{array}{lcl} p\left(a_1\right) = f_1^0 & \cdots & p^{(m_j-1)}\left(a_1\right) = f_1^{m_j-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p\left(a_r\right) = f_r^0 & \cdots & p^{(m_j-1)}\left(a_r\right) = f_r^{m_j-1} \end{array}$$

   Testen Sie Ihre Prozedur für das Beispiel a_1, a_2, a_3 und $f_1^0, f_1^1, f_2^0, f_2^1, f_3^0, f_3^1, f_3^2$.

Hinweis: Verwenden Sie die Maplefunktionen inverse, nullspace, coeff.