Lineare Algebra II
Tutorium 3

Bearbeitung und Besprechung im CIP-Pool der Mathematik,
Montag 09.06.2008, 12:30-14:00 und Donnerstag 12.06.2008, 12:30-14:00.

1. Sei $L = V(l) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $l \in \mathbb{Q}[x,y,z]$ eine Gerade.

   (a) Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die eine Parametrisierung $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to L$, $(t_0 : t_1) \mapsto (l_0(t_0,t_1) : l_1(t_0,t_1) : l_2(t_0,t_1))$ von L bestimmt, wobei $l_i \in \mathbb{Q}[t_0,t_1]$ homogen linear sind.

   (b) Wenden Sie Ihre Funktion auf die Gerade $L = V(2x - 3y + 4z)$ an, erstellen Sie mit Maple einen Plot von L in $\mathbb{R}^2$ sowohl als Verschwindungsmenge, als auch als Bild Ihrer Parametrisierung.

2. Sei $Q = V(q) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $q \in \mathbb{Q}[x,y,z]$ eine ebene Quadrik von vollem Rang, d.h. gegeben durch ein homogenes quadratisches Polyom

$$q(x) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   mit einer symmetrischen Matrix A von vollem Rang.

   (a) Erstellen Sie eine Maple-Funktion, die einen Punkt auf Q bestimmt.

   (b) Schreiben Sie ein Maple-Skript, das eine Parametrisierung $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to Q$ von Q bestimmt. Fassen Sie Ihr Programm in einer Prozedur zusammen.

3. Betrachten Sie die Quadriken

$$Q_1 = V\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z^2\right)$$
$$Q_2 = V\left(-3x^2 + 8xy + 3y^2 - z^2\right)$$
$$Q_3 = V\left(x^2 + 4xy + 4y^2 - 2xz + yz\right)$$

   (a) Modifizieren Sie Ihre Funktion zur Bestimmung eines Punktes auf einer Quadrik Q so, daß sie falls möglich einen Punkt mit reellen Koordinaten auf Q findet.

   (b) Wenden Sie Ihr Programm auf Q_1, Q_2, Q_3 an und erstellen Sie mit Maple jeweils einen Plot in $\mathbb{R}^2$ sowohl als Verschwindungsmenge, als auch als Bild Ihrer Parametrisierung.

4. Betrachten Sie projektive Kurven $C = V(f)$, $D = V(g) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, wobei $f, g \in \mathbb{Q}[x,y,z]$ homogene Polynome vom Grad $\deg(f) = c$ und $\deg(g) = 2$ ohne gemeinsamen Faktor sind.

   (a) Schreiben Sie ein Maple-Programm, das alle Schnittpunkte von C mit D bestimmt.

   (b) Wenden Sie Ihr Programm an auf

$$f = x^3 - 4xz^2 - y^2z \qquad g = x^2 - 2xz + y^2 - 8z^2$$

   (c) Fertigen Sie mit Maple einen Plot in $\mathbb{R}^2$ mit C, D und den Schnittpunkten an.

Hinweis: Verwenden Sie die Maplefunktionen solve, fsolve, rand, plot und aus dem Paket plots und die Funktionen implicitplot, display.