Lineare Algebra II
Tutorium 4

Bearbeitung und Besprechung im CIP-Pool der Mathematik,
Montag 23.06.2008, 12:30-14:00 und Donnerstag 26.06.2008, 12:30-14:00.
Das Maple-Worksheet mit den Inputdaten M_i finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

1. (a) Seien $f \in \mathrm{Hom}\,(V_1, V_2)$ und $g \in \mathrm{Hom}\,(W_1, W_2)$ Homomorphismen zwischen endlichdimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen mit Basen $v_{1,1}, ..., v_{1,r_1}$ von V_1, $v_{2,1}, ..., v_{2,r_2}$ von V_2, $w_{1,1}, ..., w_{1,s_1}$ von W_1 und $w_{2,1}, ..., w_{2,s_2}$ von W_2. Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die die darstellende Matrix $\Phi_{T_1}^{T_2}\,(f \otimes g)$ von $f \otimes g$ bezüglich der Basen

$$T_1 = \left(v_{1,1} \otimes w_{1,1}, ..., v_{1,1} \otimes w_{1,s_1}, ..., v_{1,r_1} \otimes w_{1,s_1}\right) \text{ von } V_1 \otimes W_1$$

und

$$T_2 = \left(v_{2,1} \otimes w_{2,1}, ..., v_{2,1} \otimes w_{2,s_2}, ..., v_{2,r_2} \otimes w_{2,s_2}\right) \text{ von } V_2 \otimes W_2$$

bestimmt.

(b) Wenden Sie Ihre Funktion auf

$$f = x\frac{\partial}{\partial x} : \mathbb{Q}\,[x]_{\leq 3} \to \mathbb{Q}\,[x]_{\leq 3}$$
$$g = \frac{\partial^2}{\partial x^2} : \mathbb{Q}\,[x]_{\leq 3} \to \mathbb{Q}\,[x]_{\leq 1}$$

an. Bestimmen Sie für f, g, $f \otimes g$ und $g \otimes f$ jeweils den Rang.

2. Seien $f \in \mathrm{End}\,(V)$ und $g \in \mathrm{End}\,(W)$.

(a) Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die die Eigenwerte und deren algebraische Vielfachheiten für f und g bestimmt und daraus die Eigenwerte und deren algebraische Vielfachheiten für $f \otimes g$ berechnet.

(b) Testen Sie Ihre Funktion für $f = M_1$ und $g = M_2$ an.

(c) Bestimmen Sie für

$$M_3 = J\,(a, 3) \qquad M_4 = J\,(b, 5)$$

und $M_3 \otimes M_4$ Basen der Eigenräume.

3. Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die für nilpotente Matrizen N_1 und N_2 ohne Berechnung von $N_1 \otimes N_2$ eine Basis des Kerns des Kroneckerprodukts $N_1 \otimes N_2$ bestimmt. Erproben Sie Ihre Funktion an $N_1 = M_5$ und $N_2 = M_6$.

4. (a) Seien $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{Q}^{m\times m}$. Schreiben Sie eine Maplefunktion, die die Kroneckersumme $A \oplus B$ bestimmt.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von M_7 und M_8 und der Kroneckersumme $M_7 \oplus M_8$, folgern Sie, daß die Sylvestergleichung

$$M_7 X + X M_8 = M_9$$

eine eindeutige Lösung $X \in \mathbb{Q}^{n\times m}$ hat und bestimmen Sie diese.