

Einführung in die Algebra und Zahlentheorie

Präsenzübung

1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann heißt a kongruent zu b modulo m

$$a \equiv b \pmod{m}$$

wenn $m \mid (a - b)$. Zeigen Sie, dass kongruent modulo m eine Äquivalenzrelation ist und beschreiben Sie die Äquivalenzklassen.

2. Sei $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ eine endliche Menge von Primzahlen. Zeigen Sie

$$\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \sum_{m \in M} \frac{1}{m}$$

mit

$$M = \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid m \text{ hat nur Primfaktoren in } P\}$$

Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

3. Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{Z}$ aller Lösungen x der simultanen Kongruenzen

$$x \equiv 1 \pmod{23}$$

$$x \equiv 2 \pmod{118}$$

4. Sei G eine Menge zusammen mit einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ : \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \circ b \end{aligned}$$

die folgende Axiome erfüllt:

(G1) Assoziativität

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in G$$

(G2') Es existiert ein linksneutrales Element, d.h. ein $e \in G$ mit

$$e \circ a = a \quad \forall a \in G$$

(G3') Existenz des Linksinversen, d.h. $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$ mit

$$a^{-1} \circ a = e$$

Zeigen Sie:

- (a) Für $a, b \in G$ gilt: Ist $ab = e$, dann ist auch $ba = e$.
- (b) Es ist $a \circ e = a \quad \forall a \in G$.
- (c) Das neutrale Element ist eindeutig.
- (d) Das Inverse ist eindeutig.
- (e) Für $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- (f) Für $a \in G$ ist $(a^{-1})^{-1} = a$.

5. Sei $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ein Gruppenhomomorphismus und $e_i \in G_i$ jeweils das neutrale Element. Zeigen Sie:

(a) $\varphi(e_1) = e_2$.

(b) Für $a \in G_1$ gilt $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$.

(c) Kern $\ker(\varphi) \subset G_1$ und Bild $\text{Im}(\varphi) \subset G_2$ von φ sind Untergruppen.

(d) Ist φ ein Isomorphismus, dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$$

ein Gruppenisomorphismus.

6. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \text{sign} : S_n &\longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot) \\ \sigma &\longmapsto \text{sign}(\sigma) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{aligned}$$

ein Gruppenepimorphismus ist. Bestimmen Sie den Kern von

$$\text{sign} : S_3 \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$$