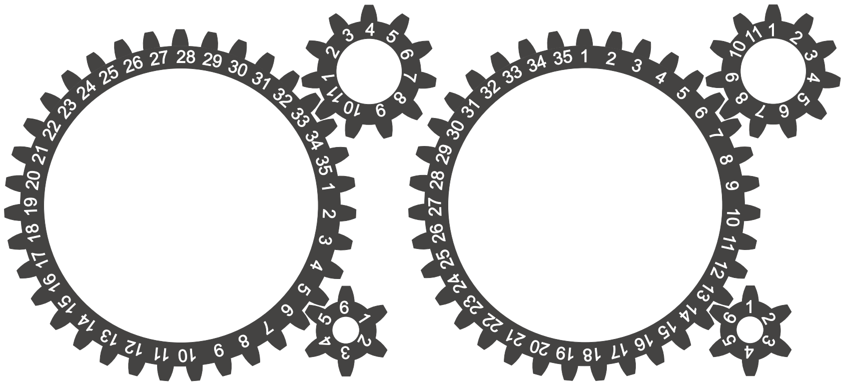
Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 1

Abgabetermin Donnerstag, den 28.10.2010 vor der Vorlesung.

1. Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ und $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Zeigen Sie: Die simultanen Kongruenzen
$$x \equiv a_1 \operatorname{mod} n_1 \qquad x \equiv a_2 \operatorname{mod} n_2$$
sind genau dann lösbar, wenn
$$a_1 - a_2 \equiv 0 \operatorname{mod} \operatorname{ggT}(n_1, n_2)$$
Die Lösung ist eindeutig modulo dem $\operatorname{kgV}(n_1, n_2)$.

2. Lassen sich die beiden Konfigurationen von Zahnrädern in Abbildung durch Drehung ineinander überführen? Falls ja, um wieviele Schritte muss man dafür drehen?



3. Zeigen Sie:
   (a) Ist $r \in \mathbb{N}$ und $p = 2^r - 1$ prim, dann ist r prim.
   (b) Ist $r \in \mathbb{N}$ und $p = 2^r + 1$ prim, dann ist $r = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.

4. Sei P_N die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig gewählte natürliche Zahlen $n, m \leq N$ teilerfremd sind. Zeigen Sie, dass für den Grenzwert gilt
$$\lim_{N \to \infty} P_N = \frac{6}{\pi^2} \approx 60.7\%$$
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die Formel
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$$
die man z.B. mit Hilfe von Fourierreihen beweisen kann.

5. (4 Zusatzpunkte) Überprüfen Sie den Primzahlsatz experimentell in Maple:
   (a) Schreiben Sie eine Prozedur, die
$$\pi(x) = |\{p \leq x \mid p \in \mathbb{N} \text{ prim}\}|$$
   für $x > 0$ berechnet.
   (b) Vergleichen Sie $\frac{\pi(x)}{x}$ mit $\rho_a :]e^a, \infty[\to \mathbb{R}$, $\rho_a(x) = \frac{1}{\ln(x) - a}$ für $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, insbesondere für große x. Für welches a erhalten Sie die beste Approximation?
   (c) Vergleichen Sie $\pi(x)$ auch mit dem Integrallogarithmus $\operatorname{Li} : [2, \infty[\to \mathbb{R}$,
$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$
Hinweis: Verwenden Sie die Maplefunktion nextprime.