Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 10

Abgabetermin Donnerstag, den 13.01.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 3.10 – 4.3 im Vorlesungsmanuskript.

1. Sei $R = \mathbb{Z}[i]$ der Ring der Gaußschen Zahlen.

   (a) Zeigen Sie: Der Chinesische Restsatz gibt einen Isomorphismus
   $$\varphi : R/(15-5i) \longrightarrow R/(3+4i) \times R/(1-3i)$$

   (b) Bestimmen Sie das Urbild von $\left(\overline{1+i}, \overline{2+i}\right)$ unter φ.

2. Seien $a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $m_1, ..., m_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^{r} m_j = d+1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes, dass es für alle
   $$b_{1,0}, ..., b_{1,m_1-1}, ..., b_{r,0}, ..., b_{r,m_r-1} \in \mathbb{R}$$
   ein eindeutiges Polynom $f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ gibt mit
   $$f^{(j)}(a_i) = b_{i,j}$$
   für alle $j = 0, ..., m_i - 1$ und $i = 1, ..., r$.

3. (a) Bestimmen Sie für
   $$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$$
   die Smith-Normalform D und $S, T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$ mit $S \cdot A \cdot T = D$.

   (b) Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}^3$ die Spalten von A. Bestimmen Sie eine Basis der von a_1, a_2, a_3 erzeugten Untergruppe U von $\mathbb{Z}^3$.

   (c) Beschreiben Sie $\mathbb{Z}^3/U$.

4. Sei G eine endliche abelsche Gruppe und
   $$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow 0$$
   mit $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Präsentation. Zeigen Sie, dass für die Gruppenordnung von G gilt
   $$|G| = |\det A|$$

5. (4 Zusatzpunkte) Implementieren Sie (z.B. in Maple) den Algorithmus zur Bestimmung der Smith-Normalform D einer ganzzahligen Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$:

   (a) Schreiben Sie eine Funktion, die die Smith-Normalform D von A berechnet.

   (b) Modifizieren Sie Ihre Funktion so, dass sie die Zeilen- bzw. Spaltentransformationen simultan auch auf der $n \times n$ bzw. $m \times m$ Einheitsmatrix durchführt, und dadurch $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{Z})$ mit $S \cdot A \cdot T = D$ bestimmt.

   (c) Erproben Sie Ihre Implementation an dem Beispiel aus Aufgabe 3 und vergleichen Sie mit der integrierten Funktion von Maple (oder GAP).

   Hinweis zur Implementation in Maple: Laden Sie das Paket zur Linearen Algebra mit `with(LinearAlgebra)`. Dieses enthält Funktionen zur Durchführung von elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen (`ColumnOperation`, `RowOperation`) und zur Bildung einer Untermatrix (`SubMatrix`). Der Befehl zur Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ lautet `irem`. Mit `proc` können Sie eine Funktion erzeugen.