Einführung in die Algebra und Zahlentheorie

Übungsblatt 15

0. Wiederholen Sie Abschnitt 7 im Vorlesungsmanuskript.

1. Konstruieren Sie das regelmäßige 3, 4, 5 und 6-Eck mit Zirkel und Lineal.

2. Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge mit $\{0, 1\} \subset M$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\text{Kon}(M) \subset \mathbb{C}$ der aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte bildet einen Unterkörper, d.h. sind $a, b \in \text{Kon}(M)$, $a \neq 0$ dann auch

$$a + b, -b, a \cdot b, \frac{1}{a} \in \text{Kon}(M)$$

(b) $\text{Kon}(M)$ ist quadratisch abgeschlossen, d.h. mit $a = r \cdot e^{i\varphi} \in \text{Kon}(M)$ ist auch $\sqrt{a} = \sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2} \in \text{Kon}(M)$.

3. Sei

$$a = e^{2\pi i/7} + e^{-2\pi i/7} = 2 \operatorname{Re}(e^{2\pi i/7})$$

und

$$f = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

Zeigen Sie:

(a) a ist eine Nullstelle von p .

(b) f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Das reguläre 7-Eck läßt sich nicht mit Zirkel und Lineal aus $\{0, 1\}$ konstruieren.

4. Sei

$$f = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

(a) Zeigen Sie, dass f keine reelle Nullstelle hat und über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

(b) Sei

$$f = (x - a)(x - \bar{a})(x - b)(x - \bar{b}) \in \mathbb{C}[x]$$

die Zerlegung von f in Linearfaktoren in $\mathbb{C}[x]$. Zeigen Sie, dass $\gamma = a\bar{a} + b\bar{b}$ eine Nullstelle von $x^3 - 4x - 1$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, jedoch

$$[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\bar{a}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\bar{b}) : \mathbb{Q}] = 2^2$$

5. Sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein Homomorphismus von faktoriellen Ringen und

$$\tilde{\varphi} : R[x] \rightarrow S[x], \tilde{\varphi}\left(\sum_{i=0}^d a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^d \varphi(a_i) x^i$$

der induzierte Homomorphismus von Polynomringen.

(a) Sei $f \in R[x]$ primitiv mit $\deg \tilde{\varphi}(f) = \deg f > 0$. Zeigen Sie: Ist f irreduzibel in $S[x]$, dann auch in $R[x]$.

(b) Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ und p eine Primzahl, die den Leitkoeffizienten von f nicht teilt. Zeigen Sie: Ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}/p[x]$, dann auch in $\mathbb{Q}[x]$.