Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 2

Abgabetermin Donnerstag, den 04.11.2010 vor der Vorlesung.

1. (a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \geq 1$ und $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt
$$\mathbb{Z}/(a \cdot b) \cong \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$$
   (b) Bestimmen Sie das Urbild von $(2 + 6\mathbb{Z}, -7 + 35\mathbb{Z})$ unter dem Gruppenisomorphismus
$$\mathbb{Z}/210 \cong \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/35$$
   (c) Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{Z}$ aller Lösungen x der simultanen Kongruenzen
$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \bmod 108 \\ x &\equiv 13 \bmod 40 \\ x &\equiv 28 \bmod 225 \end{aligned}$$

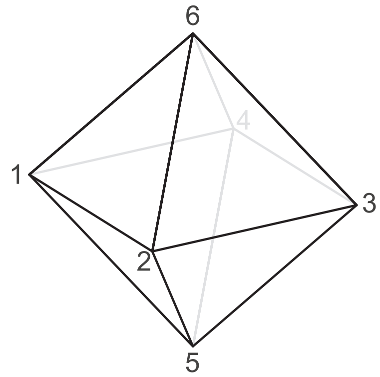
2. (a) Sei G eine Gruppe und seien $x, y \in G$ mit $x \cdot y = y \cdot x$ und $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$. Zeigen Sie:
$$\operatorname{ord}(x \cdot y) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y))$$
   (b) Sei
$$\sigma = c_1 \cdot ... \cdot c_r \in S_n$$
   Produkt disjunkter Zykel c_i der Längen m_i. Bestimmen Sie $\operatorname{ord}(\sigma)$.
   (c) Schreiben Sie
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$
   $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ sowohl als Produkt disjunkter Zykel als auch als Produkt von Transpositionen. Bestimmen Sie jeweils Ordnung und sign.
   (d) Welche Ordnungen und Werte von sign treten bei den Elementen von S_6 auf?

3. Zeigen Sie:
   (a) Ist
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & & \sigma(n-1) & k \end{pmatrix} \in S_n$$
   dann ist
$$(n-1, n) \cdot ... \cdot (k, k+1) \cdot \sigma \in S_{n-1}$$
   (b) Die S_n wird erzeugt von den Transpositionen $(1, 2), (2, 3), ..., (n-1, n)$, d.h.
$$S_n = \langle (1, 2), (2, 3), ..., (n-1, n) \rangle$$
   (c) Die S_n wird auch erzeugt von $(1, 2)$ und $(1, 2, ..., n)$, d.h.
$$S_n = \langle (1, 2), (1, 2, ..., n) \rangle$$

4. Zeigen Sie: Jede endliche Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe der S_n.

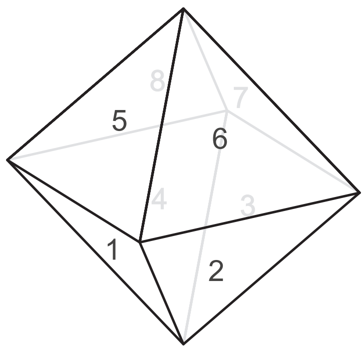
5. (4 Zusatzpunkte) Sei $G = \mathrm{Sym}\,(O)$ die Symmetriegruppe des Oktaeders O.

   (a) Durch Nummerieren der Ecken von O

   ist ein Monomorphismus $f_1 : G \to S_6$ gegeben. Finden Sie Erzeuger von $f_1\,(G)$ und zeigen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.

   (b) Durch Nummerieren der Seiten von O

   ist ein Monomorphismus $f_2 : G \to S_8$ gegeben. Finden Sie Erzeuger von $f_2\,(G)$ und zeigen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.

   (c) Interpretieren Sie die in (a) und (b) gefundenen Erzeuger geometrisch.

   (d) Finden Sie mit GAP alle Ordnungen, die für Elemente von G auftreten und jeweils die Anzahl der Elemente dieser Ordnung.

   (e) Bestimmen Sie mit GAP einen Isomorphismus von $f_1\,(G) \to f_2\,(G)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Befehle `Group`, `Elements`, `Order` und `IsomorphismGroups`.