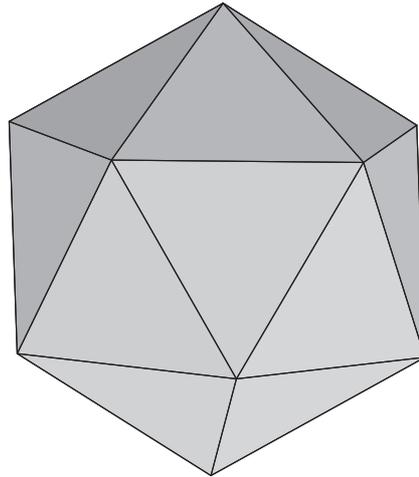


Einführung in die Algebra und Zahlentheorie

Übungsblatt 5

Abgabetermin Donnerstag, den 25.11.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 2.3.3 – 2.4 im Vorlesungsmanuskript.
1. Bestimmen Sie Anzahl und Isomorphietyp der 5-Sylowuntergruppen von S_5 .
2. Sei G die Symmetriegruppe des Ikosaeders



- (a) Basteln Sie einen Ikosaeder.
 - (b) Bestimmen Sie die Gruppenordnung von G .
 - (c) Bestimmen Sie für jeden Primteiler p von $|G|$ die Anzahl der p -Sylowuntergruppen von G , und interpretieren Sie die Sylowuntergruppen geometrisch.
3. Eine Gruppe G heißt einfach, wenn sie keine nichttrivialen Normalteiler hat (d.h. wenn $\{e\}$ und G selbst die einzigen Normalteiler sind).
- Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 84 gibt.
4. (a) Sei G eine endliche Gruppe und n_a die Anzahl der Elemente der Ordnung a . Zeigen Sie, dass die Summe

$$|G| = \sum_{a \text{ teilt } |G|} n_a$$

durch Zusammenfassen von Termen der Klassengleichung von G entsteht.

- (b) Welche Klassengleichungen können für eine Gruppe G der Ordnung 10 auftreten? Bestimmen Sie auch jeweils die n_a .
5. (4 Zusatzpunkte) Betrachten Sie die Gruppe R der Drehsymmetrien des Ikosaeders.
- (a) Bestimmen Sie die Ordnung von R .
 - (b) Beschreiben Sie die Elemente von R geometrisch.
 - (c) Bestimmen Sie die Klassengleichung von R .
 - (d) Zeigen Sie, dass R einfach ist.

Hinweis: Diese Aufgabe können Sie auch mit Hilfe von GAP lösen.