

# Einführung in die Algebra und Zahlentheorie

## Übungsblatt 6

**Abgabetermin Donnerstag, den 02.12.2010 vor der Vorlesung.**

0. Gehen Sie Abschnitt 2 im Vorlesungsmanuskript durch und markieren Sie, was Sie in Ihre Klausurzusammenfassung aufnehmen wollen.
1. Geben Sie Primzahlen  $p < q$  an, für die es eine nichtzyklische Gruppe der Ordnung  $pq$  gibt.
2. Seien  $p, q$  Primzahlen und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $|G| = p \cdot q$ . Zeigen Sie, dass  $G$  nicht einfach ist, d.h. einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt.
3. Sei  $G$  eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Bestimmen Sie die Anzahl der 3- und 5-Sylowuntergruppen von  $G$ .
4. Sei  $p$  eine Primzahl,  $\mathbb{F}_p$  ein Körper mit  $p$  Elementen und

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}_p, ad - cb = 1 \right\}$$

Bestimmen Sie die Gruppenordnung von  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ , eine der  $p$ -Sylowuntergruppen und die Anzahl  $s_p$  der  $p$ -Sylowuntergruppen.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei  $G$  eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Zeigen Sie:
  - (a)  $A_5$  hat eine Untergruppe der Ordnung 12.
  - (b) Hat  $G$  eine Untergruppe der Ordnung 12, dann ist  $G$  schon isomorph zu  $A_5$ .
  - (c)  $G$  ist isomorph zu  $A_5$ .