Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 7

Abgabetermin Donnerstag, den 09.12.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 3.1 – 3.4 im Vorlesungsmanuskript.

1. Stellen Sie die Verknüpfungstafeln der Multiplikation und Addition des Rings $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ auf. Welche Elemente von $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sind Einheiten und welche Nullteiler? Geben Sie auch die Gruppentafel der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^{\times}$ an.

   Können Sie ein Kriterium formulieren, wann ein Element von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Einheit oder ein Nullteiler ist?

2. Zeigen Sie:

   (a) Jeder Integritätsring mit nur endlich vielen Elementen ist ein Körper.

   (b) In einem endlichen Ring ist jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

3. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie: $I = R$ genau dann, wenn $I \cap R^{\times} \neq \emptyset$.

4. Wir bestimmen die Einheitengruppe $R^{\times}$ von $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Zeigen Sie dazu:

   (a) $\pm 1 \in R^{\times}$

   (b) $\pm\left(1 \pm \sqrt{2}\right) \in R^{\times}$

   (c) Ist $a + b\sqrt{2} \in R^{\times}$, dann gilt $a^2 - 2b^2 = \pm 1$

   (d) Ist $a + b\sqrt{2} \in R^{\times}$, dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit
   $$a + b\sqrt{2} = \pm\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n_1}\left(1 - \sqrt{2}\right)^{n_2}$$
   Hinweis: Vollständige Induktion nach $|a|$.

   (e) Folgern Sie, dass
   $$R^{\times} = \left\{\pm\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

5. (4 Extrapunkte) Sei R ein Integritätsring und $S = R\backslash\{0\}$. Wir konstruieren den Ring von Brüchen
   $$Q(R) = \left\{\frac{r}{s} \mid r \in R,\, s \in S\right\}$$
   als $Q(R) = (R \times S)/\sim$ mit der Äquivalenzrelation
   $$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' - sr' = 0$$
   und schreiben $\frac{r}{s} := [(r, s)]$ für die Äquivalenzklassen. Addition und Multiplikation sind gegeben durch
   $$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} \qquad \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$
   Zeigen Sie:

   (a) Addition und Multiplikation sind wohldefiniert und $Q(R)$ ist ein Körper.

   (b) $j : R \to Q(R)$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ ist ein Monomorphismus.

   (c) Universelle Eigenschaft: Ist K ein Körper und $\varphi : R \to K$ ein Monomorphismus, dann existiert genau ein Monomomorphismus $\tilde{\varphi} : Q(R) \to K$, sodass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ j$.