Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Tutorium zur Computeralgebra

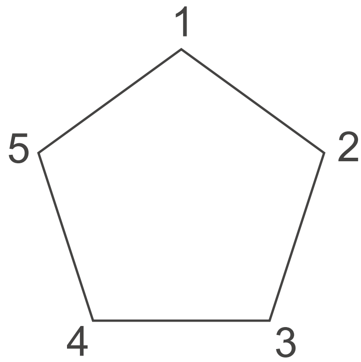
Das Tutorium findet am 25.11.10 von 10-12 Uhr und 16-18 Uhr im CIP-Pool der Mathematik (Raum 0.06, E2 4) statt. Sie können aus den folgenden Aufgaben wählen (oder auch eigene Fragestellungen vorschlagen oder die Aufgaben für Extrapunkte aus den bisherigen Übungen bearbeiten, falls Sie diese noch nicht gelöst haben). Zur Bearbeitung sind GAP (und Maple) vorgesehen. Einen Link zur Onlinehilfe von GAP finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Ihre bearbeiteten Aufgaben können Sie für (maximal 12) Extrapunkte als Ausdruck abgeben (oder per Email an charly@math.uni-sb.de schicken).

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender simultaner Kongruenzen

$$x \equiv 1 \bmod 54 \qquad x \equiv 13 \bmod 80 \qquad x \equiv 28 \bmod 225$$

   Hinweis: GAP: `ChineseRem`, Maple: `igcdex`, `chrem`.

2. Sei G die Symmetriegruppe des regelmäßigen 5-Ecks

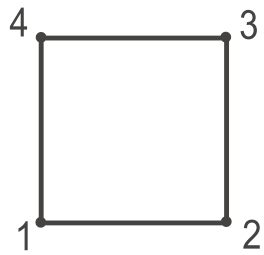


   Bestimmen Sie

   (a) Erzeuger von G, und beweisen Sie mit Hilfe von GAP Ihre Behauptung.
   (b) die Elemente von G.
   (c) alle Untergruppen von G und welche davon Normalteiler sind.
   (d) die Sylowuntergruppen von G.
   (e) die Konjugationsklassen von G, deren geometrische Interpretation und die Klassengleichung von G.

   Hinweis: Verwenden Sie die GAP-Funktionen `Group, Order, LatticeSubgroups, ConjugacyClassesSubgroups, Size, Representative, ConjugacyClasses.`

3. (a) Sei D_4 die Symmetriegruppe des Quadrats



   Bestimmen Sie mit Hilfe von GAP die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ und die Gruppe der inneren Automorphismen $\mathrm{Inn}(G)$, das Zentrum $Z(G)$, und zeigen Sie $\mathrm{Aut}(G) \cong D_4$.

(b) Zeigen Sie: Die Gruppe S_6 wird von den Elementen $(1,2,3,4,5)$ und $(5,6)$ erzeugt und die Zuordnung

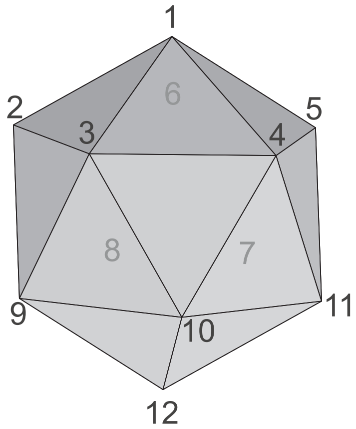
$$\begin{array}{lcl} (1,2,3,4,5) & \mapsto & (1,2,3,4,5) \\ (5,6) & \mapsto & (1,2)\,(3,5)\,(4,6) \end{array}$$

lässt sich zu einem Automorphismus φ von S_6 fortsetzen. φ ist kein innerer Automorphismus und somit $\mathrm{Inn}\,(S_6) \subsetneqq \mathrm{Aut}\,(S_6)$.

Hinweis: Verwenden Sie die GAP-Befehle

- `AutomorphismGroup`
- `InnerAutomorphismsAutomorphismGroup`
- `IsomorphismGroups`
- `GroupHomomorphismByImages`
- `Kernel`.

4. Finden Sie Erzeuger der Symmetriegruppe G des Ikosaeders



als Untergruppe der S_{12}, und bestimmen Sie die Klassengleichung von G. Finden Sie alle Sylowuntergruppen von G.

5. Sei

$$A = \{g_1, ..., g_n\}$$

eine endliche Menge und F die freie Gruppe erzeugt von A (mit neutralem Element e). Seien $r_1, ..., r_s$ Elemente von F und N der kleinste Normalteiler von F, der $r_1, ..., r_s$ enthält. Dann heißt

$$\langle g_1, ..., g_n \mid r_1 = e, ..., r_s = e \rangle := F/N$$

die Gruppe mit Erzeugern g_i und Relationen r_i. Zeigen Sie mit Hilfe von GAP, dass für die Symmetriegruppe des Würfels gilt

$$W \cong \left\langle \alpha, \beta \mid \alpha^4 = e,\ \beta^6 = e,\ (\alpha\beta)^2 = e,\ \left(\alpha^{-1}\beta^2\right)^2 = e \right\rangle$$

Hinweis: Verwenden Sie den GAP-Befehl `FreeGroup`.

6. Bestimmen Sie mit Hilfe von GAP das semidirekte Produkt $G \rtimes_\varphi H$ von $G = \langle (1,2,3,4) \rangle$ und $H = \langle (1,2) \rangle$ bezüglich dem Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & H & \to & \mathrm{Aut}\,(G) \\ & h & \mapsto & \kappa_h = (g \mapsto hgh^{-1}) \end{array}$$

Welche Gruppe erhalten Sie?

Überprüfen Sie für $G = A_4$ und H und φ wie oben, dass

$$G \rtimes_\varphi H \cong S_4$$

Hinweis: Verwenden Sie den GAP-Befehl `SemidirectProduct`.