Algebraische Topologie

Literatur: Webseite

Mayer '89

Fulton '95

Stöcker/Zieschang '88

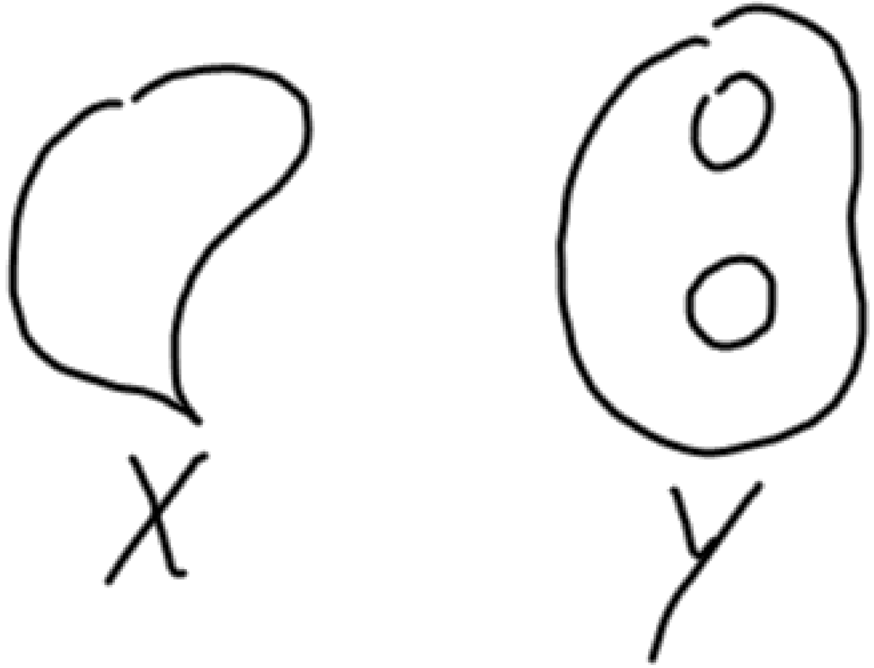
0 Einführung

0.1 Die grundlegende Frage

$\exists$ zw. 2 geg. top. X, Y
bij. in beide Richt. stetige Abb.
(Homöomorphismus)?

Bsp. 0.2

1. $\mathbb{R}^2$:



nicht homöom.

2. Komplemente von Knoten

Idee: $X \longmapsto$ diskretes Obj. $H(X)$, s.d. für 2 top. R. X, Y gilt:

$X \approx Y \Longrightarrow H(X) \cong H(Y)$

Dann: $H(X) \not\cong H(Y) \Longrightarrow X \not\approx Y$.

0.2 Wesentl. Begriffe

Def 0.3 <u>Topologie</u> auf Menge X

ist: Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen v. X

mit:
1. Bel. $\bigcup$ aus $\mathcal{T}$ sind in $\mathcal{T}$
2. $\bigcap$ zweier auch
3. $X, \emptyset$ sind in $\mathcal{T}$.

Elemente v. $\mathcal{T}$: <u>offen</u>. $(X, \mathcal{T})$ top. Raum.

Bsp. 0.4

1. $\mathcal{P}(X)$: <u>diskrete Top.</u>
2. <u>Indiskrete Top.</u>: $\{\emptyset, X\}$
3. $\mathbb{R}^n$, eukl. Abst.

   $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, falls $x \in U$

   $\exists B_\varepsilon(x) \subset U$.

Def. 0.5 $f: X \longrightarrow Y$, $x \in X$. f heißt <u>stetig</u> in x, wenn zu jeder offenen Umg V von $f(x)$ eine offene Umg. U von x ex.: $f(U) \subset V$.

X, Y <u>homöom.</u> : $\exists$ bij st. Abb $f: X \to Y$ mit $f^{-1}: Y \to X$ stetig. $\underline{X \approx Y}$.

<u>Bsp. 0.6</u>

1. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$

   $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguläre $n \times n$-Mat.

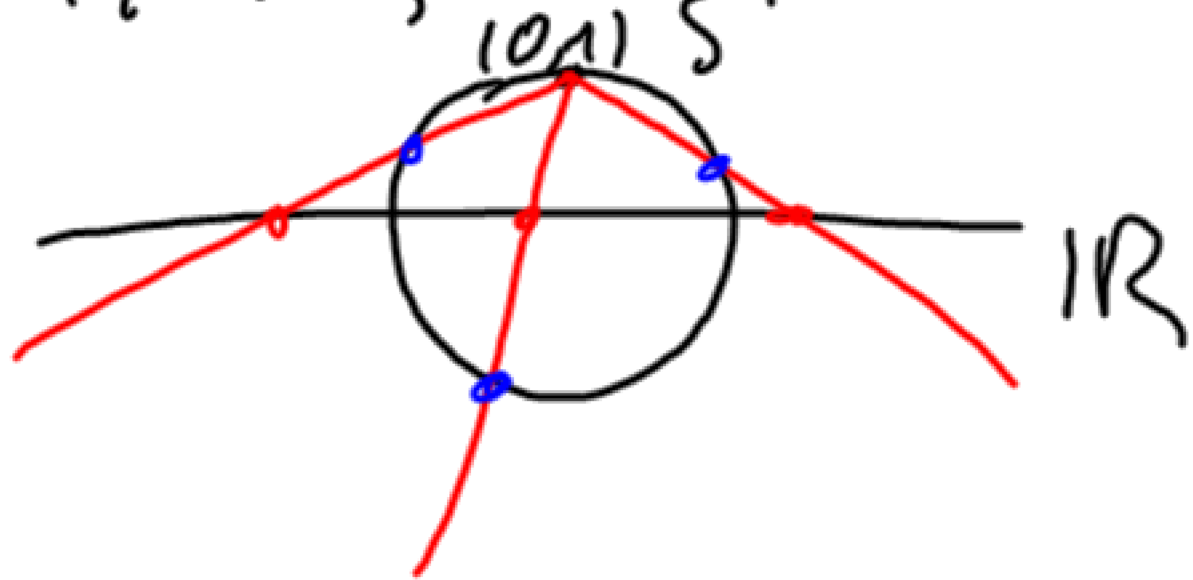
   $\Rightarrow X \approx f(X)$.

2. B^n

3. <u>Einheitssphäre</u> $S^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

stereographische Projektion vom Nordpol $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ zeigt:

$S^1 \setminus \{(0,1)\} \approx \mathbb{R}$



0.3 Wegzusammenhang und Zusammenhang

Def. 0.7 X, $x_0, x_1 \in X$. Ein *Weg* v. x_0 nach x_1 ist eine stetige Abb. $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$.

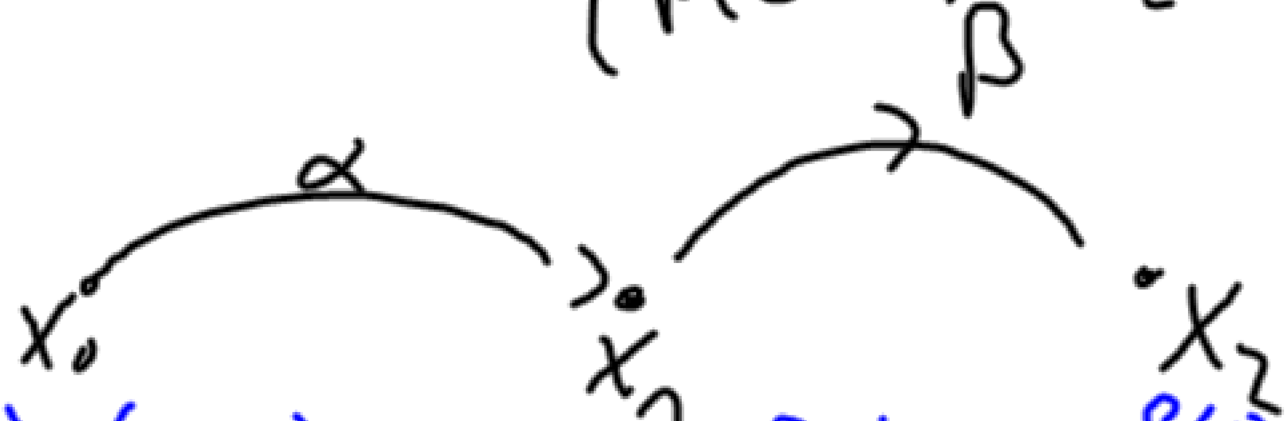
Ex. ein Weg zw. x_0, x_1, so heißen sie *verbindbar*.

ε_{x_0} : *konstante Weg*. *geschlossen*: $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

Satz/Def. 0.8

Sind $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ Wege mit $\alpha(1) = \beta(0)$, dann:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$



$\alpha(0) = (\alpha * \beta)(0)$ $\quad$ $\alpha(1) = \beta(0) = (\alpha * \beta)(\frac{1}{2})$ $\quad$ $\beta(1) = (\alpha * \beta)(1)$

U

Satz/Def. 09. Ist $\alpha : [0,1] \to X$ Weg v. x_0 nach x_1, so ist $\alpha^{-1} : [0,1] \to X$ mit $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ der <u>inverse Weg</u>.

Satz/Def. "Durch einen Weg verbindbar" ist Äquivalenzrel. auf den Punkten v. X. Eine Klasse heißt <u>Weg-Zshg-Komp.</u>

Wegzshg. ist top. Invariante, d.h.
ändert sich nicht unter Homöom.

Def. 0.12 X zshg., wenn

$\nexists A, B \subset X$ mit $A \neq \emptyset \neq B$,

$A \cap B = \emptyset$

A, B offen

$X = A \cup B$.

Bsp. 0.13

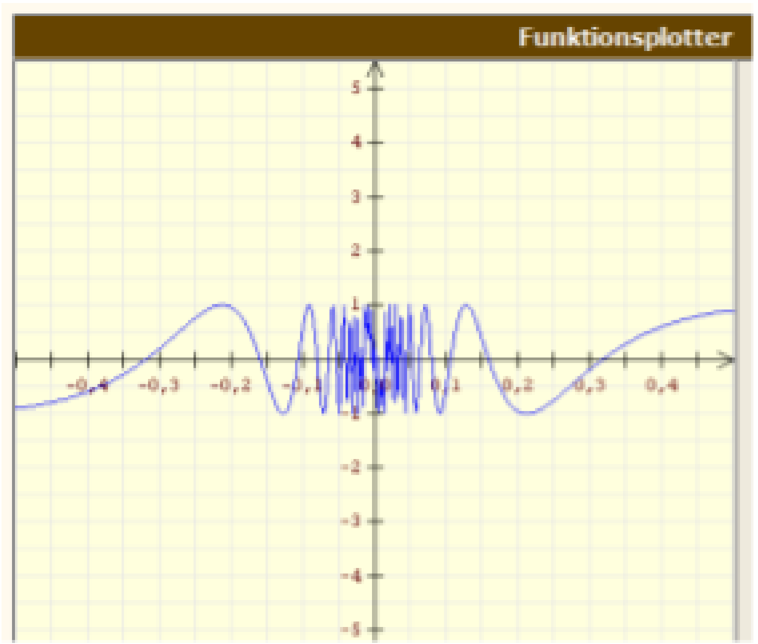
3. Intervalle in $\mathbb{R}$ sind zshg.

Satz: wegzshg $\Longrightarrow$ zshg.

$\not\Longleftarrow$

Bsp.

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\frac{1}{x}\} \subset \mathbb{R}^2$.



$\overline{X} = X \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

$\overline{X}$ ist zshg., nicht wegzshg.

1. Die Fundamentalgruppe

1.1. Def. der Fund.-Grp, Bsp.

<u>Def. 1.1.</u> $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ und

$$\alpha(1) = \beta(1) = x_1 .$$

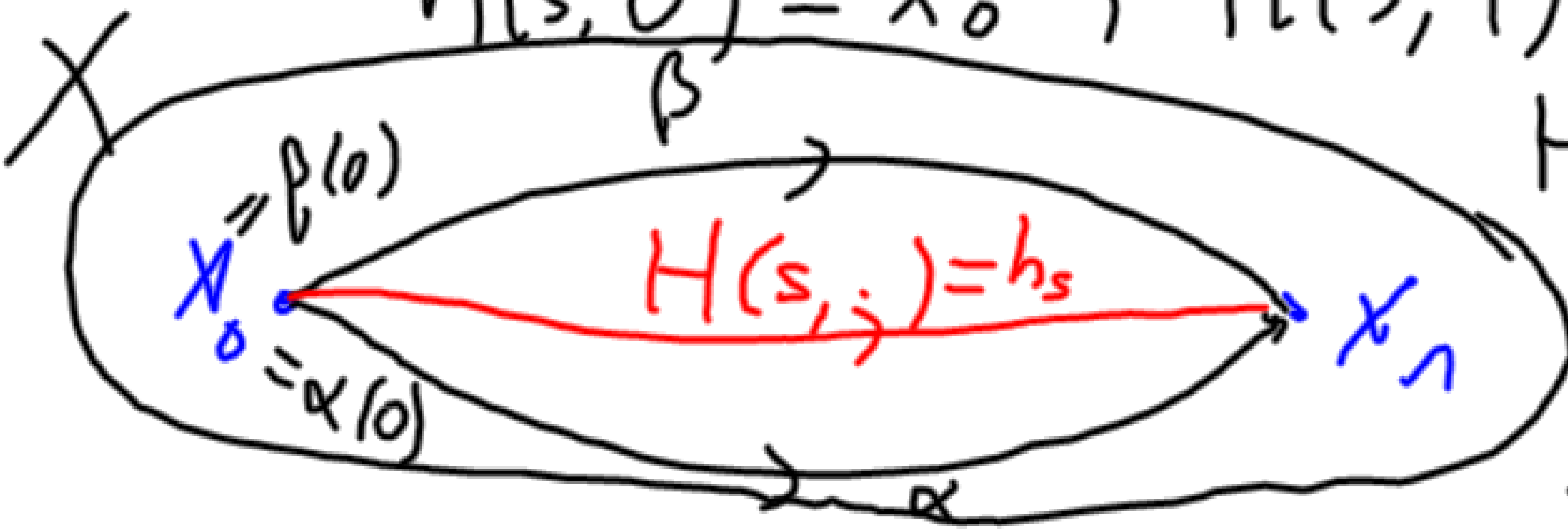
α, β heißen <u>homotop</u>, $\underline{\alpha \simeq \beta}$.

wenn $\exists$ stetige Abb.

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

mit $H(0,t) = \alpha(t)$, $H(1,t) = \beta(t)$

$$H(s,0) = x_0 \quad , \quad H(s,1) = x_1$$



H heißt <u>Homotopie</u>.

<u>Bsp.</u> X.

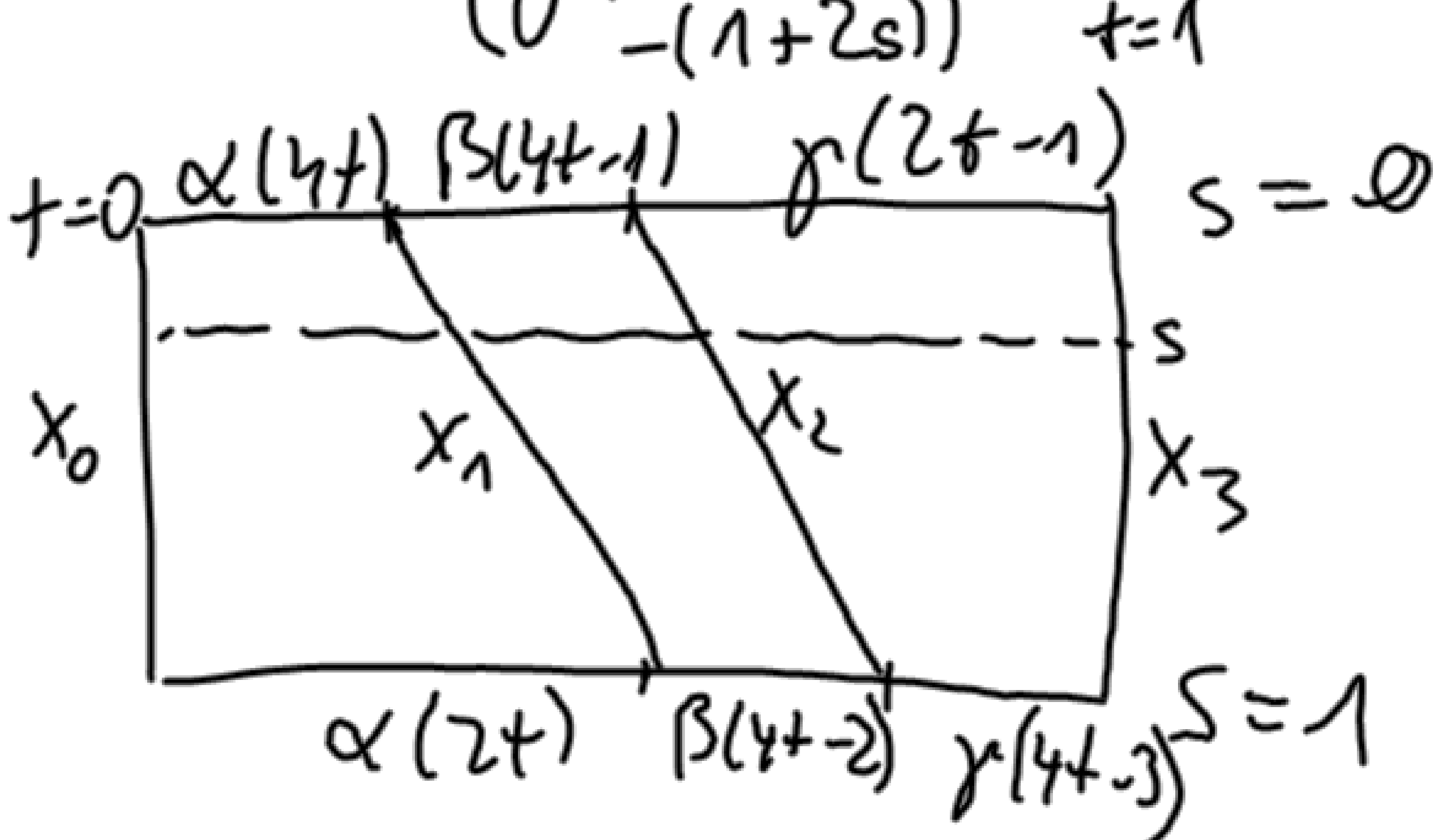
1. α, β, γ Wege v. x_0 nach x_1, x_1 n. x_2, x_2 n. x_3 , $x_i \in X$.

Dann sind:

$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$. $\quad \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xrightarrow{\beta} \cdot \xrightarrow{\gamma} \cdot$

Dies zeigt die Homotopie:

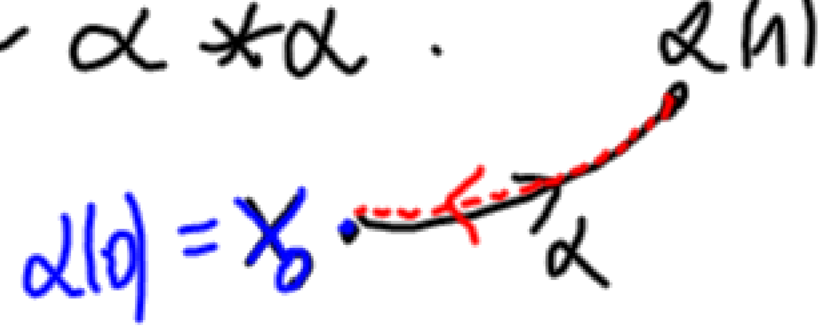
$$
H(s,t) = \begin{cases} \alpha((4-2s)t) & 0 \le t \le \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t-(s+1)) & \frac{s+1}{4} \le t \le \frac{s+2}{4} \\ \gamma((2+2s)t - (1+2s)) & \frac{s+2}{4} \le t \le 1. \end{cases}
$$



2. Sei ε_{x_0} konstante Weg.

$\alpha : [0,1] \to X$ bel. Weg, $\alpha(0) = x_0$

$\Rightarrow \quad \varepsilon_{x_0} \sim \alpha * \alpha^{-1}$.



Dies zeigt die Homotopie: ...

Satz 1.3 Homotopie von Wegen ist eine Äquivalenzrelation.

Bew.: Transitivität

$\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$

vermöge H_1, H_2.

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(2s,t) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ H_2(2s-1,t) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

ist Hom. zu α und γ.

Satz 1.4

$$\alpha_1 \sim \alpha_2,\ \beta_1 \sim \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 * \beta_1 \sim \alpha_2 * \beta_2.$$

~~Satz~~ Def 1.5. $x_0 \in X$, $\alpha \in \underline{\Omega(X, x_0)}$ ein geschl. Weg. Mit $[\alpha]$ die Homotopiekl. v. α.

Sei $\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0)\}$

Vermöge $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$

wird auf $\pi_1(X, x_0)$ eine

wohldef. Verknüpfung def. $\rightarrow$ Gruppe

mit neutr. El. $[\varepsilon_{x_0}]$.

$\pi_1(X, x_0)$ heißt <u>Fundamentalgrp.</u>

v. X mit <u>Basispkt.</u> x_0.

$\pi_0(X) = \#$ Zshg. Komp.