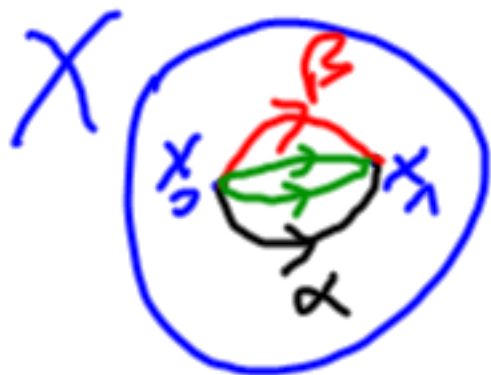




$$\alpha: [0,1] \rightarrow X$$



$\times$   
 $\mathbb{Z}$



$$\pi_0(X) = \# \text{ Weg-} \\ \text{Zugs-komp.}$$

## Satz/Def 1.5

$x_0 \in X$ ,  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  gesell. Weg.

Mit  $[\alpha]$  bez. wir die

Äquiv.-kl. von  $\alpha$ . Sei

$$\pi_1(X, x_0) = \{ [\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0) \}$$

Vermöge  $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$  wird  
auf  $\pi_1(X, x_0)$  eine wohldef. Verknüpfung  
erklärt. Dies gibt Gruppe mit  $1 = [e_x]$

Basis-  
punkt.

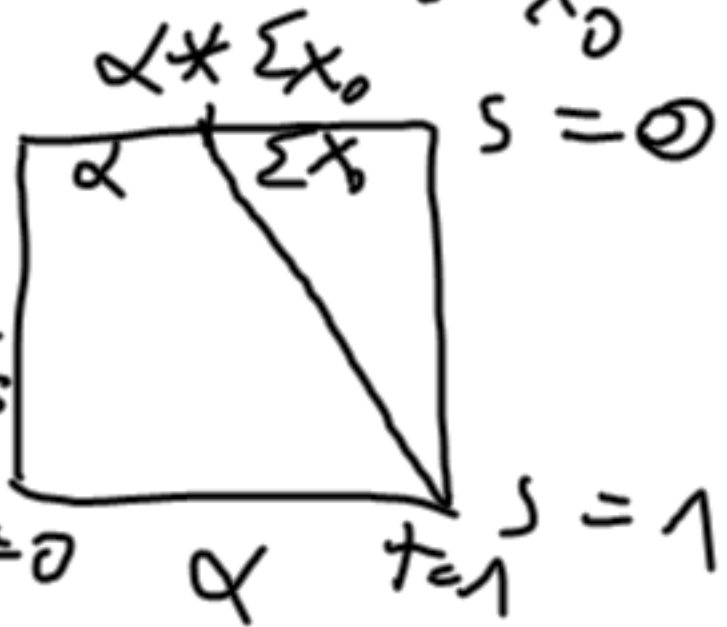


Bew: Wohledef. Satz 1.4.  
 Assoc.: Bsp. 1.2.1,  $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$   
 in Bsp 1.2.2

Das neutrale Element ist  $[\Sigma x_0]$ :

$$\alpha * \Sigma x_0 \sim \alpha$$

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha((2-s)t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2-s} \\ x_0 & \frac{1}{2-s} \leq t \leq 1, t=0 \end{cases}$$

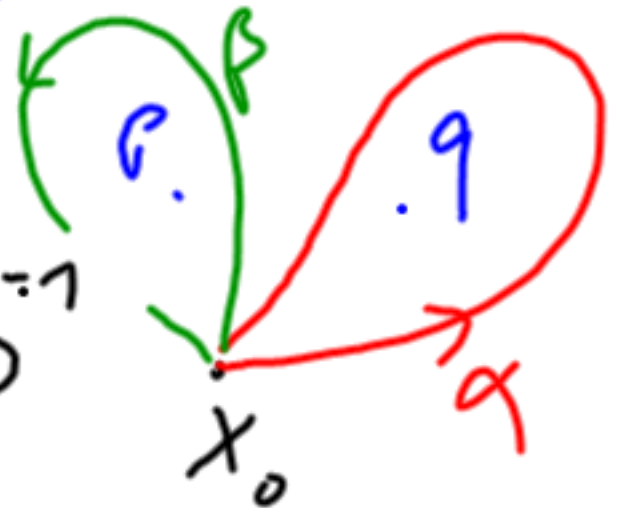


Bsp

Im Allg. ist  $\pi_1(X, x_0)$  nicht  
kommutativ.

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$$

$$\alpha * \alpha^{-1} * \beta * \beta^{-1}$$
$$\neq \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$$



# Satz/Def 1.7.

Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetige Abb mit  
 $f(x_0) = y_0$ , dann induziert

$$[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

einen wohldef. Gruppenhomom.  $f_*$

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Bew: Homotopie in  $X \Rightarrow f \circ$  Homotopie in  $Y$



~~Satz/Def.~~

Bsp 1.6 1.  $x_0 \in X$ ,  $\text{id}_X: X \rightarrow X, x \mapsto x$ .  
induziert  $\text{id}_{\pi_1(X, x_0)}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

$$[\alpha] \mapsto [\text{id}_X \circ \alpha] = [\alpha].$$

?  $y_0 \in Y$ ,  $g: X \rightarrow Y$ ,  $g(x) = y_0 \quad \forall x$ .  
 $g_*[\alpha] = [g \circ \alpha] = [c_{y_0}] \quad \forall \alpha$ .  
 $g_*$  ist also der triviale Grp.-Hom.

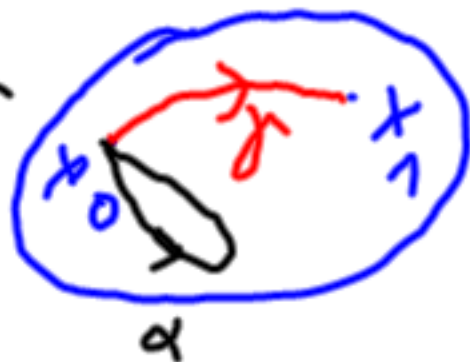
## Satz / Def 1.9

1.  $x_0, x_1 \in X$  Punkte in der gleichen Weg-  
zshg-Komp. und: ist  $\gamma: [0,1] \rightarrow X$   
Weg v.  $x_0$  nach  $x_1$ . Dann liefert

$$\pi_n(\gamma): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1),$$

$$[\alpha] \longmapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$$

einen Gruppenisomorphismus.  
Dieser hängt nur von  $[\gamma]$  ab.



2.  $\delta: [0,1] \rightarrow X$  weiter l.kgr.  $x_0, \dots, x_n$ .  
 dann ist  $\pi_1(\delta)$  ein weiterer lso,  
 der sich von  $\pi_1(\gamma)$  nur durch Konjugation mit  $[\beta] = [\gamma^{-1} * \delta]$  unterscheidet:

$$\pi_1(\delta)[\alpha] = [\gamma^{-1} * \delta]^{-1} (\pi_1(\gamma)) [\alpha] [\gamma^{-1} * \delta]$$

Bew: 1.  $\pi_1(\gamma)$  ist l.kgr. Hom:

$$\pi_1(\gamma)([\alpha] * [\beta]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \beta * \gamma]$$

$$[\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] [\gamma^{-1} * \beta * \gamma]$$

lso:  $\pi_1(\gamma)^{-1} = \pi_1(\gamma^{-1})$ .

2. klar mit Ass. .  $\square$

Bsp

$$\pi_1(S^1, \gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$[\alpha] \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\gamma}{\gamma}$$

ist wohldef. Grp-Mom.



Def. 1.10

Zwei stet. Abb  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  heißen homotop,  $f_0 \simeq f_1$ ,

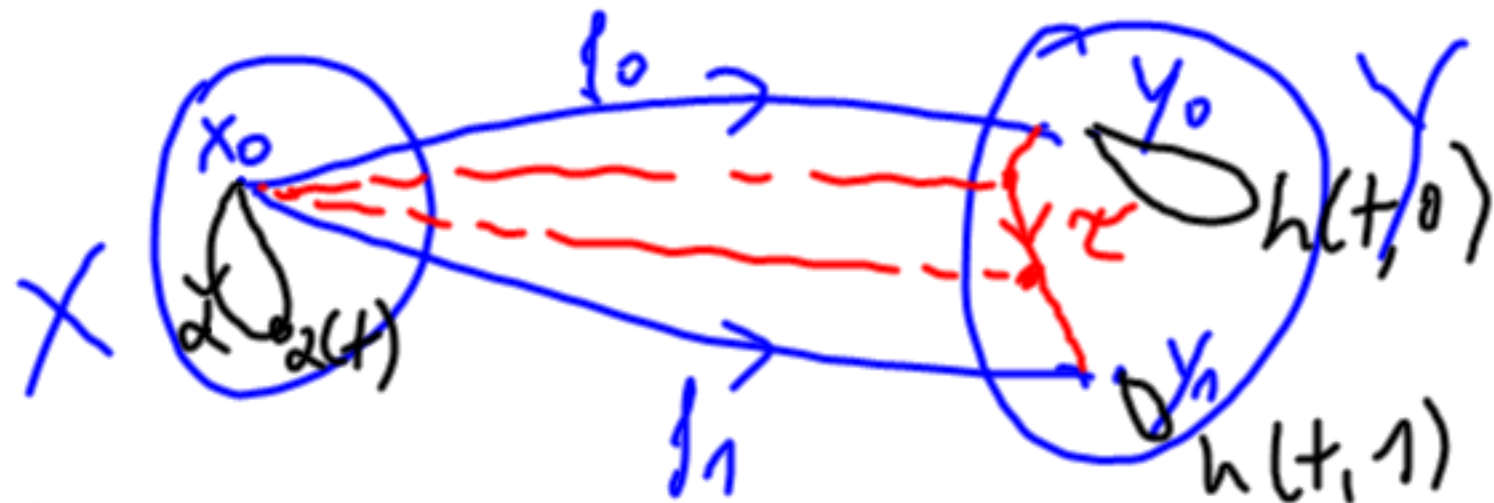
falls es eine stet. Abb (Homotopie)

$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  gibt, s.d.

$$H(x, 0) = f_0(x), H(x, 1) = f_1(x) \quad \forall x.$$

Sei  $x_0 \in X$  ein Basispunkt. Wir setzen

$$y_0 = f_0(x_0), y_1 = f_1(x_0). \quad \tau = \tau_{x_0} : [0, 1] \rightarrow Y \\ t \mapsto H(x_0, t).$$



Satz / Def. 1.11. Notation von oben.

Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 & f_{0*} \rightarrow \pi_1(Y, y_0) & \\
 \text{d.h. } f_{1*}([\alpha]) \in \pi_1(X, x_0) & & \downarrow \pi_1(\tau) \\
 = (\pi_1(\tau))(f_{0*}[\alpha]) = f_{1*}([\alpha]) & & \pi_1(Y, y_0)
 \end{array}$$

Bew: Sei  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ . Wir  
 müssen eine Homotopie zwischen  
 den Wegen  $\tau^{-1} * (f_0 \circ \alpha) * \tau$  und  
 $f_1 \circ \alpha$  konstruieren. Dazu betr. wir  
 $h(t, s) := h(\alpha(t), s)$ . Mit dieser  
 Notation gilt:  $h(t, 0) = (f_0 \circ \alpha)(t)$   
 $h(t, 1) = (f_1 \circ \alpha)(t)$ .  
 Die Homotopie  
 liefert:



□.

Kor. 1.12. Sind  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$   
homotope Abb. mit  $H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t$ .

Dann ist  $(f_0)_* = (f_1)_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$

Bew:  $f_0(x_0) = H(x_0, 0) = y_0 = H(x_0, 1) = f_1(x_0)$ .

$\Rightarrow \tau$  ist konstanter Weg  $\Sigma_{y_0}$ . Damit ist

$\pi_1(\tau): \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  die Id.

Satz  
 $\Rightarrow$  Beh.

□

Bsp. 1.13  $\mathbb{R}^n$ , darauf Abb.  $f_1 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ .

und  $f_0 \equiv 0$ .  $f_1$  u.  $f_0$  sind  
homotop vermöge  $H(x,t) = x \cdot t$

$H(0,t) = 0 \forall t$ . Mit 1.12 folgt:

$$\text{id}_{\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)} = (f_1)_* = (f_0)_* = \text{triv.}$$

\* Grp Hom.

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong \{1\}.$$

Def. 1.14.

1.  $A \subseteq X$ ,  $f, g: X \rightarrow Y$  mit  $f|_A = g|_A$ ,

so heißt  $f$  zu  $g$  homotop relativ

$A$ ,  $f \simeq g \text{ rel } A$ , falls  $\exists$  Homotopie

$G$  von  $f$  nach  $g$ , s.d.  $\forall a \in A, \forall t \in [0, 1]$ :

$$G(a, t) = f(a) = g(a).$$

2. ...

# 1.3. Überlagerungen und Liftungen

Def. 1.24.

Seien  $X, Y$  top. R. Eine stetige Abb  $p: Y \rightarrow X$  heißt Überlagerung, falls jeder Pkt  $x \in X$  eine offene Umg.  $N \subset X$  hat, f.d.  $p^{-1}(N)$  disjunkte Vereinigung off. Mengen ist, welche  $p$  homöomorph zu  $N$ .

$N \subset X$  heißt Überlagerungsumgebung.

Für  $x \in X$  heißt  $p^{-1}(x)$  Faser von  $x$ .

Bsp. / Def 1.25

1. Überl. v.  $S^1$  durch  $\mathbb{R}$

