§2. Überlagerungen.

2.1 Def. X, Y top. Räume. Eine stetige Abb. $p: Y \longrightarrow X$ heißt Überlager. von X, wenn $\forall x \in X$ $\exists N$ Umgebung s.d. $p^{-1}(N)$ disjunkte Vereinigung von zu N homöom. Teilmengen. So ein N heißt Überlappungsumgebung.

Bsp. 1) $\mathbb{R} \longrightarrow S^1,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$

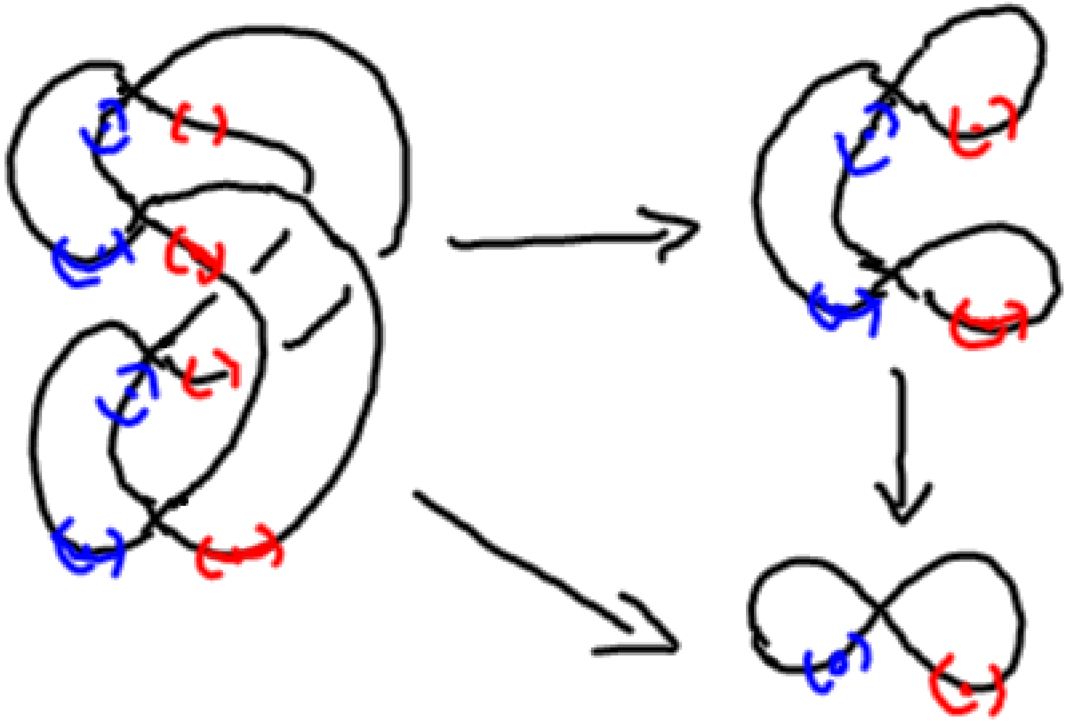
2) Triviale Überlagerung.

$Y = X \times T$, T diskret.

3) $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

4) $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*,\ z \longmapsto z^d$

Bsp.



2.3 **Def.** Zu $Y \to X$, $Y' \to X$ zwei Überlag. ist ein Morphismus von Überlagerungen ein

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

f ist autom. stetig.

f surj. $\Rightarrow$ f Überlagg

Insbesondere: iso von Überlagerung

Bsp. Jede Überlagerung ist lokal isom. zu trivialer Überlagerung

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(V) \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[dr] & & V \times p^{-1}(x) \arrow[dl] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

$|p^{-1}(x)|$ heißt Blätterzahl über x.

Ist X zshgd, dann ist $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x')|$ wohldefinierte globale Blätterzahl.

Bew. Die Funktion $x \mapsto |p^{-1}(x)|$, $X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ diskret.

ist konstant auf Zshgs Komp. $\square$

2.4. **Def.** Sei $p : Y \to X$ Überlagerung.

$f : Z \to X$ stetig. Eine Liftung von f ist $\tilde{f}$ stetig

sd. Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

2.5 **Satz**. $p: Y \to X$ Üb. $f: Z \to X$ stetig

$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Z \to Y$ Liftungen mit $\tilde{f}_1(z_0) = \tilde{f}_2(z_0)$

für ein Punkt $z_0 \in Z$. Ist Z zshgd

dann gilt $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Bew. Wir zeigen, beide Mengen

$\{z \in Z \mid f_1(z) = f_2(z)\}$ und $\{z \in Z \mid f_1(z) \neq f_2(z)\}$

sind beide offen. $\Longrightarrow$ Beh, da Z zshgd und die erste Menge $\neq \emptyset$

Sei $w \in \{z \in Z \mid f_1(z) = f_2(z)\}$ $x = f(w)$

Sei V Überung. von x und

$\tilde{V} \subset p^{-1}(V)$ das Blatt, welches w enthält.

Sei $U \subset \tilde{f}_1^{-1}(\tilde{V}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(\tilde{V})$ offene Umg. von w

$$\begin{tikzcd} & \tilde{V} \arrow[d, "p|_{\tilde{V}}", "\cong"'] \\ w \in U \arrow[ur, "\tilde{f}_1, \tilde{f}_2"] \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2|_U = p|_{\tilde{V}}^{-1} \circ f$

also gleich. $U \subset$ erste Menge.

$w \in \{z \mid \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\}$, $x = f(w)$

$\mathcal{N}$, $\exists\ \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subset \tilde{p}^{-1}(\mathcal{N})$ Blätter mit

$\tilde{f}_i(w) \in \mathcal{N}_i \qquad i = 1, 2.$

$U \subset \tilde{f}_1^{-1}(\mathcal{N}_1) \cap \tilde{f}_2^{-1}(\mathcal{N}_2)$ offen Umg. von w.

$\tilde{f}_i|_U = (p|_{\mathcal{N}_i})^{-1} \circ f$ hat Bild in $\mathcal{N}_i$

und $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$, $\Longrightarrow U \subset \{z \mid \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\}$.

□

2.6. **Satz** (Pfadliftung) $p: Y \to X$ Üb.

$\gamma : [a,b] \to X$ weg. $y \in p^{-1}(x)$ mit $x = \gamma(a)$.

Dann $\exists!$ eine Liftung

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ {[a,b]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] & X \end{tikzcd}$$

mit $\tilde{\gamma}(a) = y$.

Bew. Eind. ist klar: $[a,b]$ ist zshgd.

Existenz: Betrachten Überdeckung

$\mathfrak{U} = \{ N \mid N$ überlag.$\}$ von X.

und die Urbild Überdeckung.

$$\{\gamma^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\} \text{ von } [a,b].$$

Lemma von Lebesgue.

X komp. metrischer Raum. und $\mathcal{V}$ offene Überdeckung von X. Dann $\exists\, \varepsilon > 0$ s.d $\forall x \in X$ ein $U \in \mathcal{V}$ s.d. $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Zunächst weiter im Bew:

Nach Lebesgue ∃ Unterteilung $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$

s.d. ∀i $\gamma([t_i,t_{i+1}])\subset N$ überl. ausgeb.

Wir beginnen damit $\tilde{\gamma}$ auf $[t_0,t_1]$ zu def.

$$\begin{tikzcd} & y\in\tilde{N}\subset p^{-1}(N) \arrow[d, "(p|_{\tilde{N}})^{-1}"] \\ {[t_0,t_1]} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & N \end{tikzcd}$$

.

Analog $y_1=\tilde{\gamma}(t_1)\in p^{-1}(\gamma(t_0))$ und eind.

$[t_1,t_2]\xrightarrow{\tilde{\gamma}}Y$ mit $\tilde{\gamma}(t_1)=y_1$ usw

$\rightsquigarrow \tilde{\gamma} : [a,b] \longrightarrow Y$ wie gew. $\square$

Lebesgue $\longrightarrow$ Übung.

3.7 Satz (Homotopieliftung)

$p : Y \to X$ Überlag. und

$H : [0,1] \times [a,b] \longrightarrow X$ stetig.

eine Homotopie zwischen den Wegen

$\gamma_0 = H(0,-)$, $\gamma_1 = H(1,-)$.

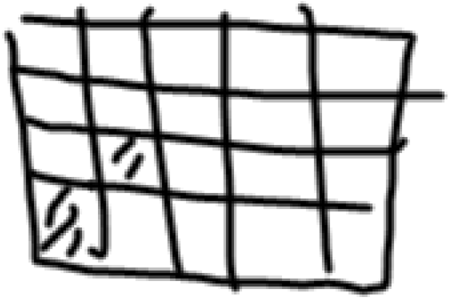
Dann ∃ genau eine Liftung

$$\tilde H : [0,1]\times[a,b] \longrightarrow Y \quad \text{von } H.$$

mit $\tilde H(0,a) = y \in p^{-1}(H(0,a))$ vorgegeben.

Insbesondere sind die gelifteten Wege $\tilde\gamma_0, \tilde\gamma_1$ mit AP y homotop.

<u>Bew.</u> Nach Lebesgue ∃ Unterteilung



s.d. die Teilrechtecke in N's von H abgebildet werden.

Die Eindeutigkeit der Wegliftung sagt dass. die Teile stetig verkleben □

2.8 **Corollar** Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine Übe. und $y_0 \in Y$ ein Basispunkt über $x_0 = p(y_0)$. Dann ist der Gruppenhomo.

$$p_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv.

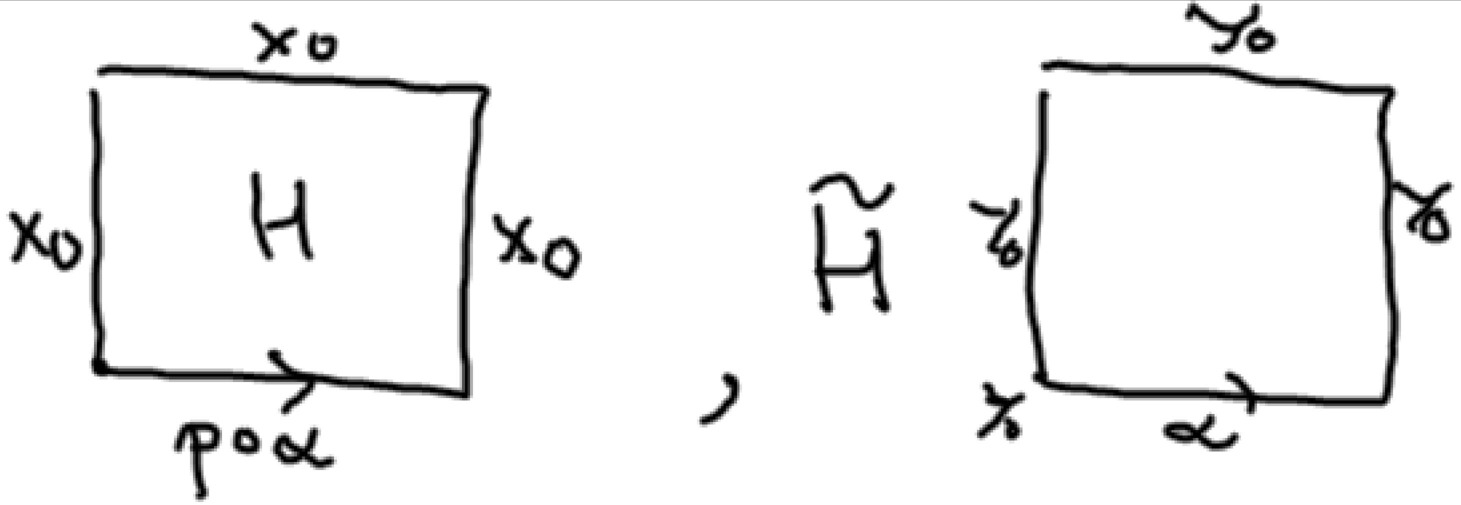
Beweis. Sei $\alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ geschl. Weg mit AP=EP=y_0. Angen.

$$p \circ \alpha \sim \varepsilon_{x_0} .$$

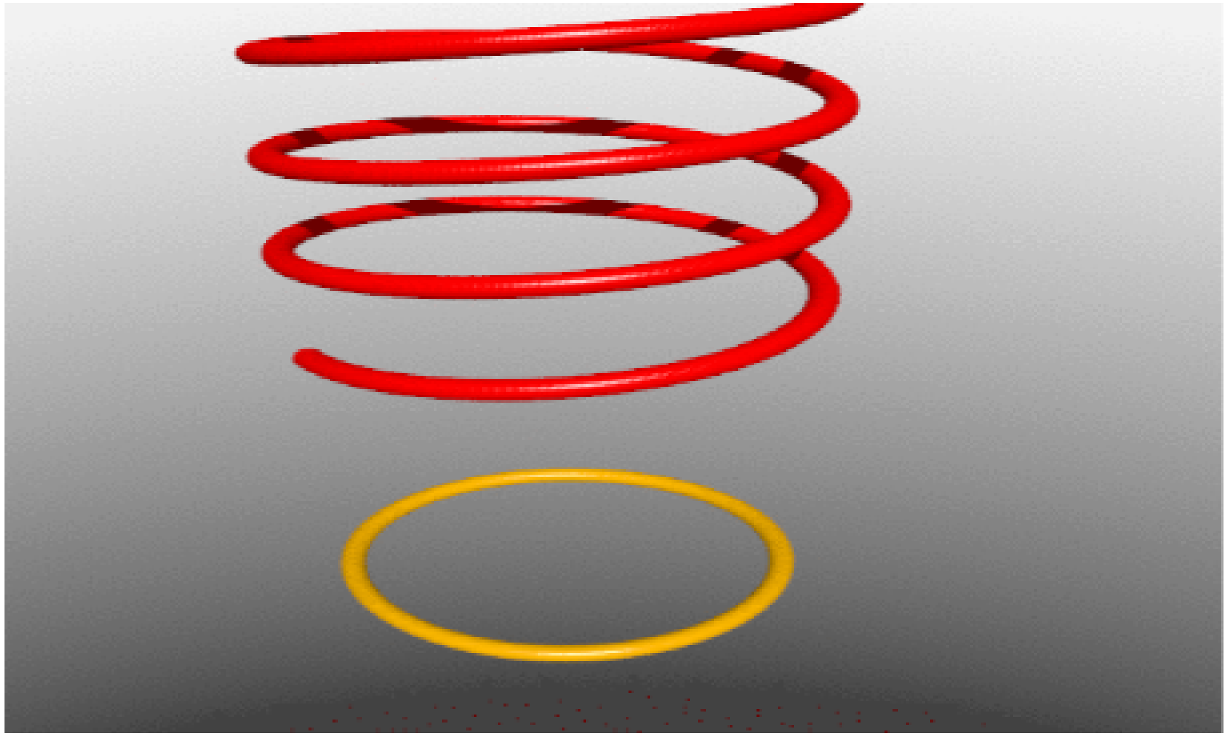
Zu zeigen ist:

$$\alpha \sim \varepsilon_{y_0} .$$

Sei H Homotopie zwischen $p \circ \alpha$ und ε_{x_0}
$\tilde{H}$ die Liftung mit $\tilde{H}(0,0) = y_0$.


x_0
x_0
H
x_0
$p \circ \alpha$
,
$\tilde{H}$
y_0
y_0
y_0
x_0
α

.



2.9 **Satz** Sei $Y \xrightarrow{p} X$ üb.

$\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ Wege mit gleichem A.P. und gleichem E.P., $x_0 = \alpha(0)$.

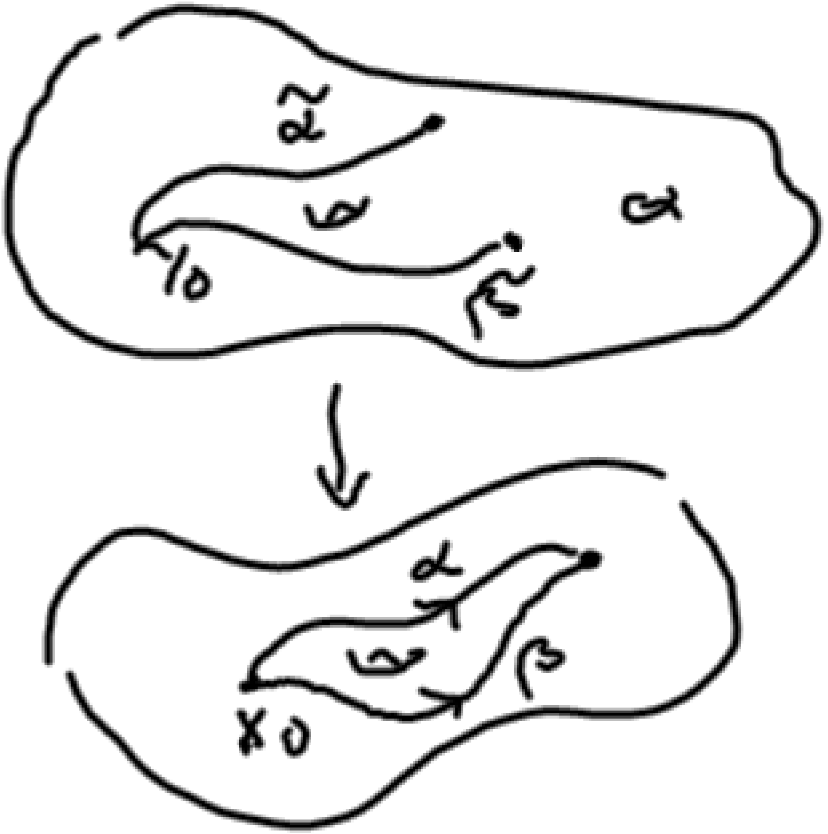
$y_0 \in p^{-1}(x_0)$ und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$: die Wegliftungen mit AP $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = y_0$.

Notwendig und hinreichend, dafür dass

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$$

ist

$$[\alpha * \beta^{-1}] \in p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$$



<u>Bew.</u> Notwendigkeit ist klar

$$[\alpha * \beta^{-1}] = [p \circ (\tilde\alpha * \tilde\beta^{-1})] \in p_* \pi_1(Y, y_0),$$

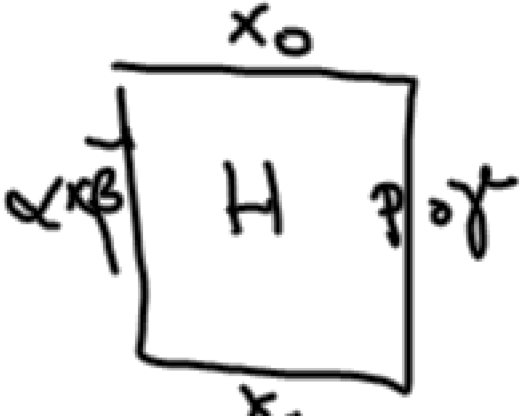
Hinreichend:

Angenommen $\alpha * \beta^{-1} \sim p \circ \gamma$

γ geschl. Weg in Y mit AP $= y_0$

H Homotopie von $\alpha * \beta^{-1}$ nach $p \circ \gamma$,

und $\tilde{H}$ die Liftung, $\tilde{H}(1,-) = \gamma$



Insb. gilt

$$H(0,\tfrac{1}{2}) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$$

§3. Decktransformation.

Viele Üb. entstehen aus Quotientenbildung nach Gruppenop.

3.1. **Def.** Y top. Raum, G Gruppe. Eine Operation von G auf Y ist eine Abb. $G \times Y \longrightarrow Y$, $(g,y) \mapsto g \cdot y$ mit

1) $g \cdot (h \cdot y) = (g \circ h) \cdot y$

2) $e \cdot y = y$ 3) $Y \longrightarrow Y$, $y \mapsto g \cdot y$ ist stetig $\forall g \in G$.

$\Longrightarrow$ $Y \xrightarrow{g} Y$ Homöomorph. Inverses geben durch g^{-1}.

$G\cdot y = \{g\cdot y \mid g\in G\}$ heißt Orbit oder Bahn.

$$X = Y/_{G}$$ die Menge der Orbiten.

$$p : Y \longrightarrow X$$

X wird zu top. Raum mit Hilfe der Quotiententopologie: $U\subset X$ heißt offen, wenn $p^{-1}(U)\subset Y$ offen.

Die Operation heißt treu, wenn

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}(Y) \text{ injektiv ist.}$$

Beispiel $Y = \mathbb{R}$, $G = (\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (n,x) \longmapsto n+x.$$

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1 \text{ vermöge } t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

2) $G = \mu_n$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln

$$\mu_n \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad (\zeta, z) \longmapsto \zeta z.$$

$\mathbb{C}^*/\mu_n \cong \mathbb{C}^*$ vermöge $z \longmapsto w = z^n$.

In beiden Fällen ist $Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung.

3.2. <u>Satz</u>. $G \times Y \to Y$ Freie opr. auf top. Raum.

$$p : Y \longrightarrow X := Y/G$$ ist eine Überl.

genau dann wenn, jeder Punkt $y \in Y$ eine offen Umgebung V besitzt so dass

$$gV \cap V = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \{e\}.$$

<u>Bew.</u> Sei $gV \cap V = \emptyset \Longrightarrow {:}N = p(V)$

$$p^{-1}(N) = \dot{\bigcup_{g \in G}} gV$$ und alle $gV \xrightarrow{\cong} N$.

Umgekehrt. $p: Y \to X = Y/G$ Überl.

$y \in Y$; $x = p(y)$, W überdg. Umgeb.

$p^{-1}(W) \supset V$ Blatt mit $y \in V$

$\Rightarrow$ $p^{-1}(W) = \dot{\bigcup}_{g \in G} gV$ $\square$

3.3. **Def** Eine freie Operation $G \times Y \to Y$ heißt lokal einfach, wenn $\forall y \in Y\ \exists V$ Umg. s.d. $V \cap gV = \emptyset\ \forall g \neq e$.

Beispiele

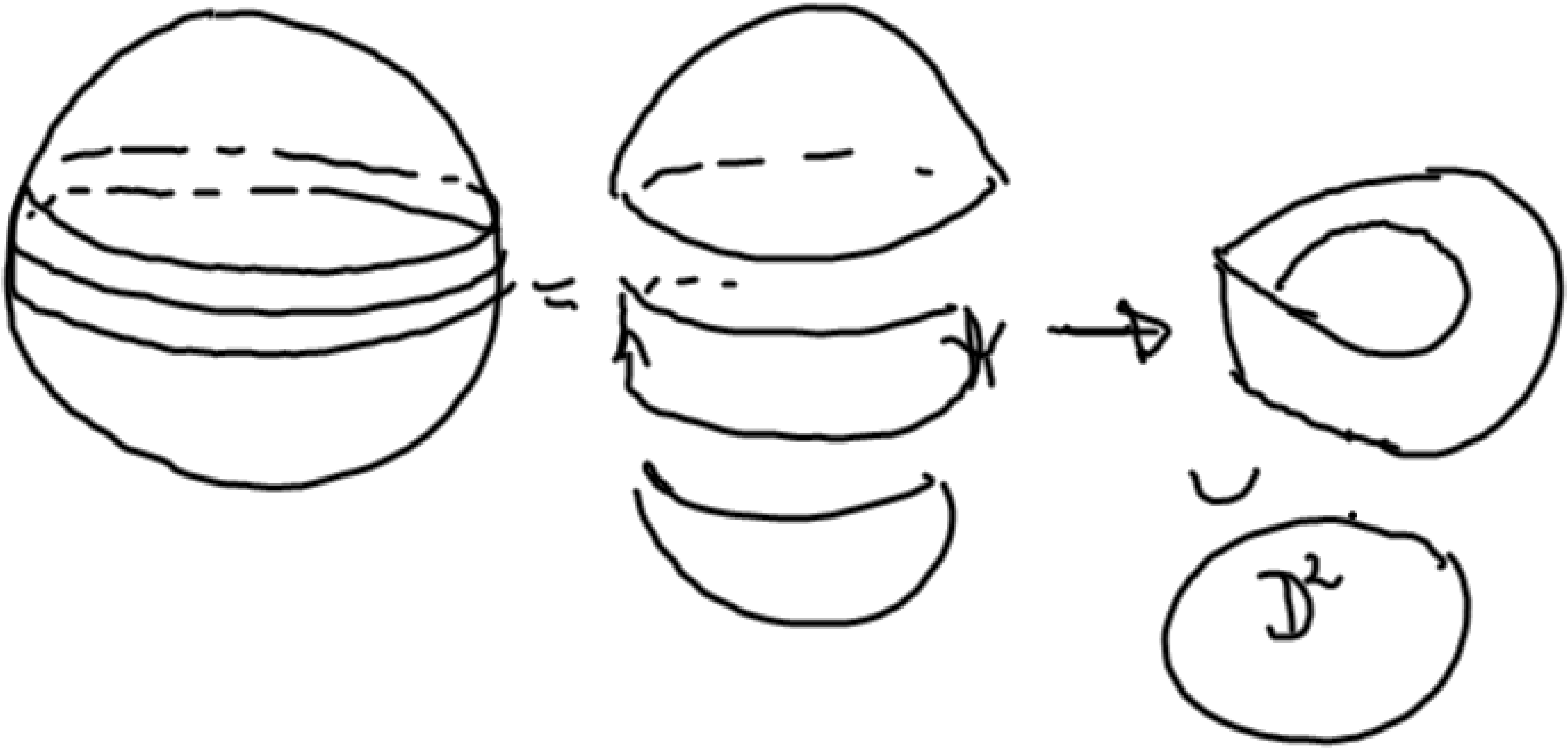
3) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$. $G = \{\pm 1\}$.

$$\begin{aligned} G \times S^n &\longrightarrow S^n. \\ (\varepsilon, x) &\longmapsto \varepsilon x \end{aligned} \qquad S^n/G = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) :=$ Menge der Geraden

durch $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

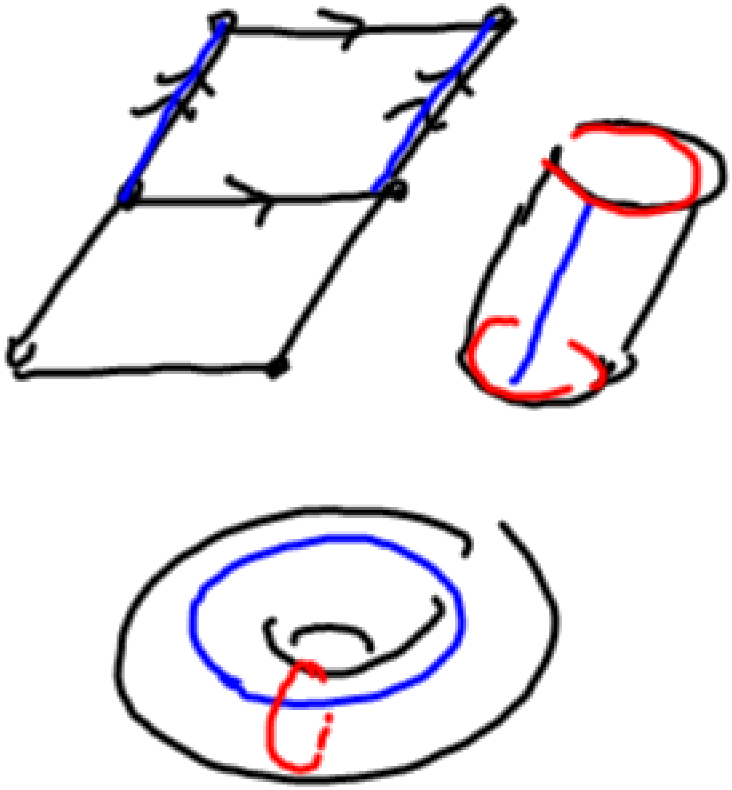
der sogenannte n-dim. projektive Raum.


D²

b) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$

$\wr\wr$

$\mathbb{C}/\Lambda$ $\quad \Lambda$ Gitter



$\mathbb{R}^2$, opération engt par

$$(x,y) \longmapsto (x+1,y)$$

$$(x,y) \longmapsto (-x,y+1)$$