3.5 Def. $Y \xrightarrow{p} X$ Üb

Eine Decktransformation ist ein Homöomorph.

$$\varphi : Y \to Y \quad \text{s.d.}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert

$\mathrm{Deck}(Y/X) =$ Gruppe der Decktransform.

3.6 <u>Satz</u> Sei $p: Y \longrightarrow X = Y/G$ eine Üb., die aus einer lokal einfachen Gruppenop.

$$G \times Y \longrightarrow Y \text{ entsteht.}$$

und Y zshgd. Dann ist die natürliche Abb.

$$G \longrightarrow \mathrm{Deck}(Y/X)$$

ein Isom.

<u>Beweis</u> Sei $y_0 \in Y$ und $\varphi: Y \longrightarrow Y \in \mathrm{Deck}(Y/X)$

$y_1 = \varphi(y_0)$. Dann können wir φ als Liftung von p auffassen:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$ mit $\varphi(y_0) = y_1 \in p^{-1}(x_0)$

wobei $x_0 = p(y_0)$. Da $p^{-1}(x_0) = G \cdot y_0$

$\exists\, g \in G$ mit $g y_0 = y_1$. $\tilde{\varphi}: Y \xrightarrow{\cdot g} Y$

$\tilde{\varphi}(y) = g \cdot y$ ist ebenfalls eine Liftung von

p mit $\tilde{\varphi}(y_0) = y_1 = \varphi(y_0)$. Aus der

Eindeutigkeit der Liftung (2.5) folgt $\varphi = \tilde{\varphi}$.

Also φ ist das Bild von g unter der natürlichen Abb.

$$G \to \mathrm{Deck}(Y/X).$$

Dies also ein surjektiver Gruppenhomo und injektiv, da die Operation von G treu ist: nur $e \in G$ operiert trivial $\square$

3.7 Satz. $Y \to X$ Übl., Y zshgd

Dann op. $\mathrm{Deck}(Y/X)$ lokal einfach auf Y.

Falls $\mathrm{Deck}(Y/X)$ transitiv auf einer Faser $p^{-1}(x)$ operiert, gilt

$$X \cong Y/\mathrm{Deck}(Y/X).$$

Beweis: $y \in Y$, $x = p(y)$ und W eine Überlag. Umg. von x. Sei $V \subset p^{-1}(W)$ Kompon.

mit $y \in V$. $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Deck}(Y/X)$.

Ang. $\varphi(V) \cap \varphi'(V) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi' : Y \longrightarrow Y$ induziert
$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr] \arrow[dr, "\cong"'] & & V \arrow[dl, "\cong"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

hat also den Fixpunkt $y \in V$.

$\Longrightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi' = \mathrm{id}_Y$ nach Eind. der Liftung.

Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & Y/\mathrm{Deck}(Y/X) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$
komm.

$Y/\mathrm{Deck}(Y/X) \xrightarrow{\bar{p}} X$ ist ebenfalls eine Überlagerung. Mit der zusätzl. Voraussetzung ist $\bar{p}$ 1-blättrig über x. Da X zshgd

$\Rightarrow$ $\bar{p}$ einblättrig, d.h. ein Homöom. $\square$

<u>Beispiele</u> $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$,

$$\mathrm{Deck}(\mathbb{R}/S^1) \cong (2\pi\mathbb{Z}, +)$$

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Deck}(S^2/\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

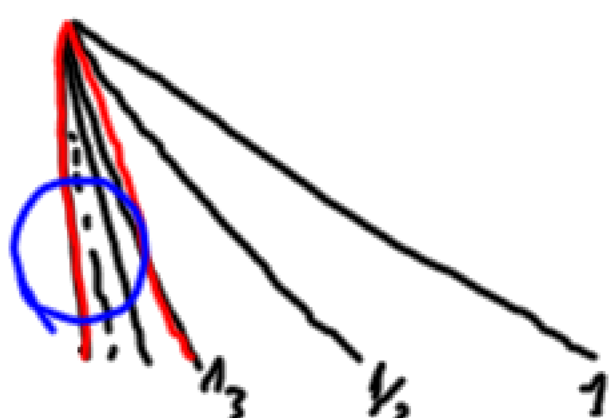
Deck () $= \mathbb{Z}_2$

Mehr in den Übungen.

Def. Ein top. Raum X heißt lokal wegzshgd, wenn

$\forall x \in X \; \forall$ Umgebg $U \ni x \; \exists \; V$ Umg $x \in V \subset U$ existiert mit V wegzshgd.

Beispiel: • Offene Teilmengen im $\mathbb{R}^n$.

• 

Betrachten den Kegel X von $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ mit Spitze $(0,1)$ nicht lok. wzshgd

Bem. lokalwgzshgd + zshgd $\Longrightarrow$ wegzshgd

denn ist Z lwzsgd + zsgd und $z_0 \in Z$

dann sind die Mengen

$$\{z \in Z \mid z \text{ ist } z_0 \text{ verbindbar}\}$$

und deren Komplement offen in Z. $\square$

3.9 Satz $p: Y \to X$ Üb.

$f: Z \to X$ stetig mit Z lokal wegzshgd

+ zshgd. Sei $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$

mit $f(z) = x = p(y)$. Es existiert eine

Liftung $\tilde{f}: Z \to Y$ mit $\tilde{f}(z) = y$

genau dann, wenn

$$f_* \pi_1(Z, z) \subset p_* \pi_1(Y, y)$$

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{f}"] & X
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y,y) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(Z,z) \arrow[r, "f_*"] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & \pi_1(X,x)
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Notwendigkeit ist klar, da

$$f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$$

Eindeutigkeit ist klar nach 2.6

Für die Umkehrung, notieren wir dass

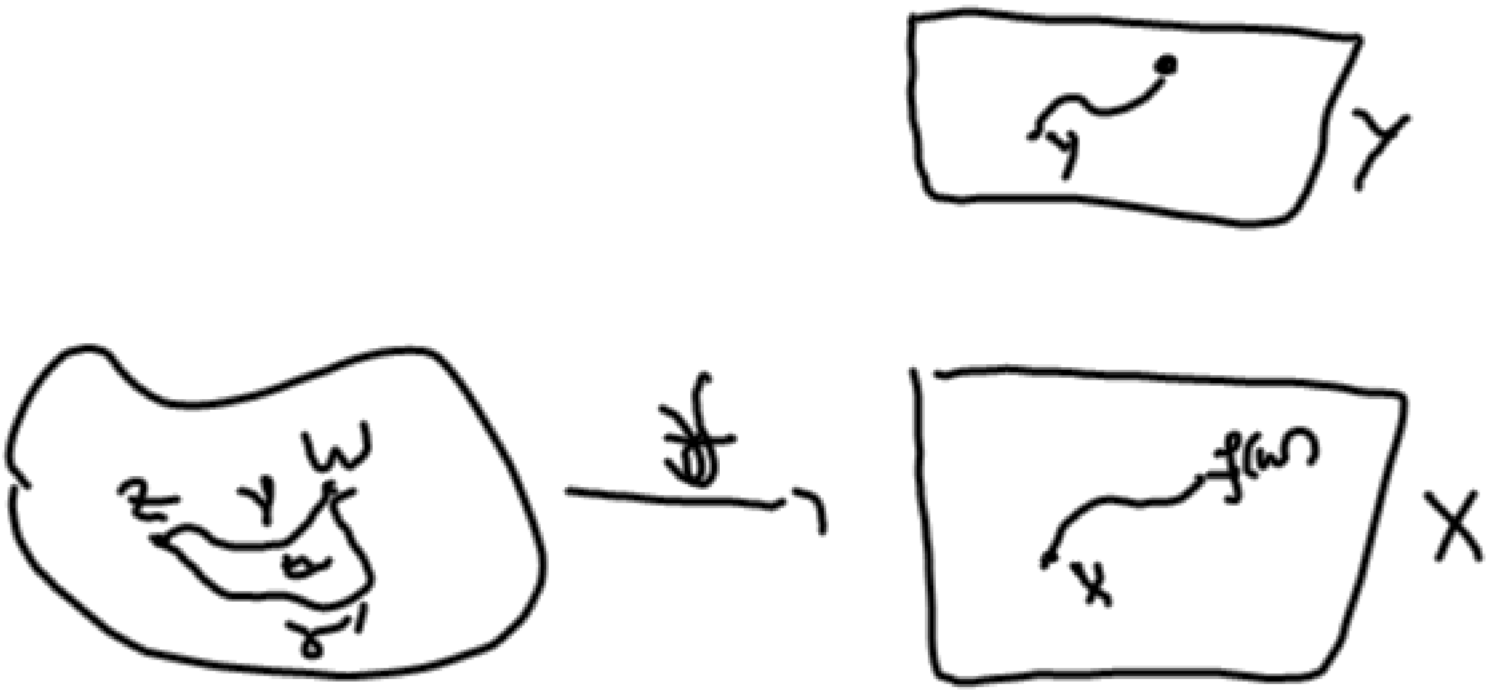
Z wegzshgd nach der Bem.

Jeder Punkt $w \in Z$ lässt sich durch ein

Weg $\gamma : [0,1] \to Z$ mit $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = w$

verbinden. Um $\tilde{f}(w)$ zu definieren betrachten

Hochliftung von $f \circ \gamma$ mit AP y



Wir definieren $\tilde f(w) =$ EP der Wegliftung von $f \circ \gamma$

Wir müssen zeigen, daß $\tilde f(w)$ unabhängig von der Wahl des Weg γ ist.

Sei γ' ein weiterer Weg von z nach w.

Dann ist

$$\gamma' * \gamma^{-1} \text{ ein geschl. Weg } z.$$

und

$$[f \circ \gamma' * \gamma^{-1}] \in f_* \pi_1(Z, z) \subset p_* \pi_1(Y, y)$$

Der Endpunkt der Liftung $f \circ \gamma$ und $f \circ \gamma'$ ist daher eindeutig nach Satz 2.9.

Also $\exists$ wohldefinierte Liftung

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Bleibt die Stetigkeit: Klar da $Y \to X$ Überl. also lokal trivial.

Dann betr. $\mathcal{N}$ überl. Umgebung von $f(w)$

und wegzshgd. Umgebung $\mathcal{U}$ von $w \in f^{-1}(\mathcal{N})$

Wir können die Punkte $u \in U$ mit $w \in U$ verbinden vermöge $\delta : [0,1] \to U$.

Dann dürfen wir für die Def. von $\tilde{f}(w)$ den Weg $\gamma * \delta$ verwenden.

Da δ in der Komponente $V \subset p^{-1}(N)$ die $\tilde{f}(U)$ enthält, sehen

$$\tilde{f}\big|_U = \Big(\underbrace{p\big|_{V \to N}}_{\text{homöom.}}\Big)^{-1} \circ f .$$

Kom. zweier stetiger Abb. ∎

3.10 Cor X lokal wegzshd, $p': Y' \to X$ und $p: Y \to X$ Überlagerungen mit Y, Y' zshgd.

Sei $y \in Y$, $y' \in Y'$ Punkte mit $p(y) = p(y')$

$\exists$ Üb l iso

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p'"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

mit $\varphi(y') = y$

genau dann wenn, $p'_* \pi(Y', y') = p_*(Y, y)$ $\square$

Also für X lokal wegzshgd, zshgd
werden zshg Überlagerungen $Y \to X$
durch Untergruppen $\pi_1(X,x)$ klassifiziert.

3.11 <u>Satz</u>. $p: Y \to X$ Üb. Y zshgd, X lokal wegzshgd
$y \in Y$, $x = p(y)$. Ist $p_* \pi_1(Y,y) \subset \pi_1(X,x)$
ein Normalteiler, dann gilt:

$$\pi_1(X,x) / p_* \pi_1(Y,y) \cong \mathrm{Deck}(Y/X).$$

Ferner ist dann auch

$$X = Y/\mathrm{Deck}(Y/X).$$

<u>Beweis</u>. Wir konstruieren eine Operation

$$\pi_1(X,x) \times Y \longrightarrow Y.$$

Sei $z \in Y$. Wählen Weg γ von y nach z.

Sei $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$. Betrachten den Weg

$$\alpha * p\circ\gamma$$

Weglifting existiert

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r, "\alpha * p\circ\gamma"'] & X \end{tikzcd}$$

mit AP $\rho(0) = y$ und Endpunkt $\rho(1) = w \in Y$.

Wir haben also einen Punkt

$w = w(\alpha, \gamma) \in Y$ konstruiert.

Homotopie Lifting zeigt, dass w nur von $[\alpha]$ abhängt.

$$w = w([\alpha], \gamma)$$

Bleibt zu zeigen, dass w auch nicht der Wahl des Weges γ abhängt.

γ' weitere Wahl $\quad \alpha * p\circ\gamma,\ \alpha * p\circ\gamma'$

zwei Wege in X. Nach Satz 2.9 sind die Endpunkte der Liftungen gleich genau dann, wenn

$$\left[(\alpha * p\circ\gamma') * (\alpha\circ p\circ\gamma)^{-1}\right] \in p_*\pi_1(Y,y).$$

$$\|$$

$$[\alpha]\cdot\left[p\circ\gamma' * (p\circ\gamma)^{-1}\circ\alpha^{-1}\right]$$

$$= [\alpha]\cdot\big[\underbrace{p\circ\gamma' * p\circ\gamma^{-1}}_{=p\circ(\gamma' * \gamma)}\big][\alpha]^{-1}$$

$$\in p_*\pi(Y,y)$$

$p_*\pi_1(Y,y)$ ein Normalteiler in $\pi_1(X,x)$,

Also das gilt $\forall [\alpha]\ \forall\ \gamma,\gamma'\ (\Longleftrightarrow$

.

Haben also wohldef. Operation

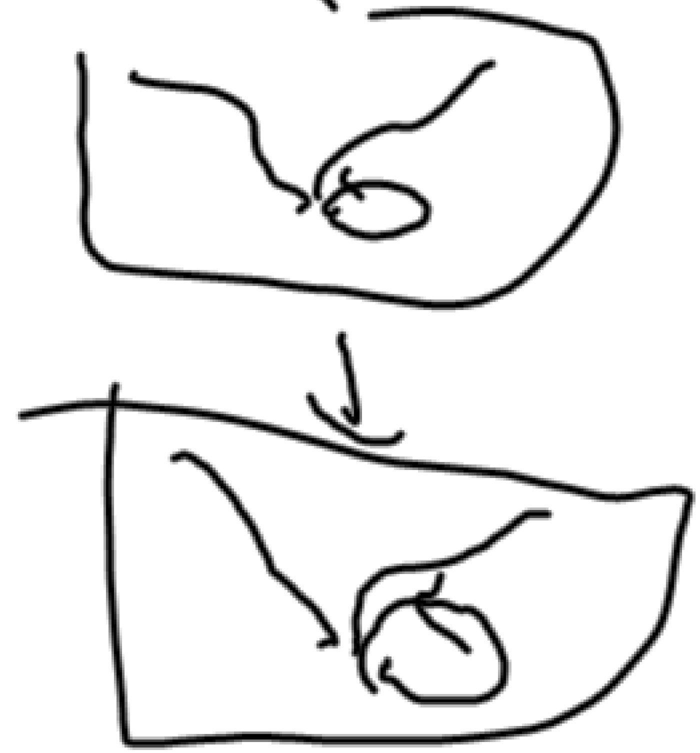
$$\pi_1(X,x)\times Y \longrightarrow Y$$

$$([\alpha],z) \longmapsto w(\alpha,\gamma)$$

γ Weg von y nach z.

Ein Element $[\alpha]$ operiert trivial $\Longleftrightarrow$

$$[\alpha]\in p_*(\pi_1(Y,y))$$



Also $\exists$

Also $\exists$ surjektiver Gruppenhomo.

$$\pi_1(X,x) / p_* \pi_1(Y,y) \longrightarrow \mathrm{Deck}(Y/X).$$

Die Abbildung ist surjektiv da

Y wegzshgd: Das Bild eines Weges

y nach $y' \in p^{-1}(x)$ ist geschlossen α

$$[\alpha].y = y'. \Longrightarrow \text{Beh} \quad \square$$

Also $\pi_1(X,x)$ operiert transitiv auf der Faser $p^{-1}(x)$. Mit $G = \pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(Y,y))$

$$\Rightarrow \quad Y/G \cong X \qquad \square$$

3.11 <u>Def.</u> X heißt <u>einfach zshgd</u>, wenn X wegzshgd und $\pi_1(X,x) = \{e\}$

13.12 <u>Kor</u> $p: Y \to X$ Üb. Y einfach zshgd, X lokal wegzshgd. Dann

$$\pi_1(X,x) \cong \mathrm{Deck}(Y/X).$$

Bew. $\pi_1(Y,y)=\{e\}$ ist Normalteiler.

<u>Kor</u> $\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z} \cong \mathrm{Deck}(\mathbb{R}/S^1)$.

$$\begin{array}{c}\pi_1(S^1,1)\\ \cup\\ [\alpha] \longmapsto \mathrm{Umlaufzahl}(\alpha) \left(= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\alpha \frac{dz}{z}\right)\end{array}$$